LMV-rapport 2010:1

Rapportserie: Geodesi och Geografiska informationssystem

Om geodetiska transformationer

Bo-Gunnar Reit

Gävle 2010

LANTMÄTERIET

Författare Bo-Gunnar Reit

Typografi och layout Rainer Hertel

Totalt antal sidor 55

LMV-Rapport 2010:1 – ISSN 280-5731

Om geodetiska transformationer

Bo-Gunnar Reit

Gävle

December 2009

Förord

Rapporten syftar till att ge en uttömmande beskrivning av de metoder som författaren utvecklade under åren 1995-2004 i samband med arbetet att ta fram transformationer mellan RT 90, de kommunala systemen och SWEREF 93/99. Läsaren förutsätts ha kännedom om de grundläggande geodetiska begreppen och de i Sverige förekommande geodetiska systemen.

Författaren riktar ett stort tack till Jonas Ågren och andra kollegor på den geodetiska utvecklingsenheten som bidragit med värdefulla synpunkter på arbetet. Ett alldeles speciellt tack till Lars E Engberg som överfört texten till Lantmäteriets dokumentstandard.

December 2009

Bo-Gunnar Reit
bo-gunnar.reit@telia.com

Innehållsförteckning

1 Problembeskrivning

I och med GPS-teknikens genombrott uppstod behov att kunna transformera koordinater mellan SWEREF 99 (inledningsvis SWEREF 93) och RT 90 samt olika lokala system.

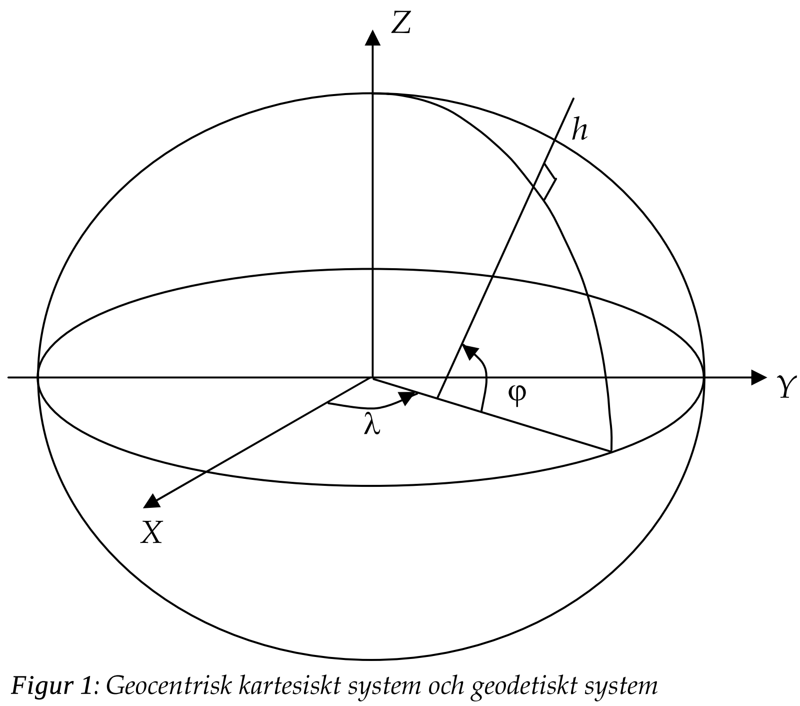
2 Aktuella system

2.1 SWEREF 99

SWEREF 99 skiljer sig från de övriga systemen genom att vara ett äkta 3-dimensionellt system med global anpassning. Referenspunkternas positioner är bestämda i ett kartesiskt koordinatsystem (*X*, *Y*, *Z*) vars origo i det närmaste sammanfaller med jordens tyngdpunkt. Till systemet är referensellipsoiden GRS 80 knuten. Ellipsoidens centrum sammanfaller med det kartesiska koordinatsystemets origo. Sambandet mellan en punkts kartesiska koordinater (*X*, *Y*, *Z*) och punktens geodetiska koordinater, latitud, longitud och höjd över ellipsoiden, (φ, λ, *h*), kan skrivas enligt formeln (se även figur 1)

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N+h)\cos\varphi\cos\lambda \\ (N+h)\cos\varphi\sin\lambda \\ (N(1-e^2)+h)\sin\varphi \end{bmatrix} \tag{2-1}$$

där $N = a/\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}$ samt *a* är ellipsoidens halva storaxel, e^2 är första excentricitetskvadraten och *N* är tvärkrökningsradien.



***Figur 1**: Geocentrisk kartesiskt system och geodetiskt system*

Som framgår av figur 1 avser X-, Y- och Z-koordinaterna ett system med origo i ellipsoidens centrum. *Låt oss, något oegentligt, kalla denna typ koordinater geocentriska koordinater.*

Omvandlingen från (X, Y, Z) till (φ, λ, h) hoppas över här men kan ske helt utan noggrannhetsförluster, se exempelvis Bowring (1976).

2.2 RT 90

RT 90 är ett 2-dimensionellt system där positionerna anges som latituder och longituder, (φ, λ), relativt referensellipsoiden Bessel 1841. På de flesta triangelpunkterna i riksnätet finns höjder över havet i system RH 70, dock av varierande kvalitet. Vad värre är, har de geoidkorrektioner som krävs för omvandling av RH 70-höjderna till höjder över Besselellipsoiden ännu sämre kvalitet, det rör sig om fel på nivån 1-2 m. Detta smittar av sig på de geocentriska koordinater (X, Y, Z) som enbart kan erhållas ur (φ, λ, h) genom omvandling enligt ekvation (2-1).

2.3 RR 92

Rikets referenssystem 1992. Ett "oäkta" tredimensionellt system baserat på Bessels ellipsoid. Det är en ren sammanfogning av det horisontella systemet RT 90, geoidhöjdsystemet RN 92 och höjdsystemet RH 70.

Origo, det vill säga referensellipsoidens medelpunkt, för RR 92 placerades knappt en kilometer från jordens tyngdpunkt. Placeringen gjordes för att få en god nationell anpassning till geoiden. Globalt stämmer dock denna placering samt dimensionerna på ellipsoiden dåligt.

RN 92

Geoidhöjderna i RN 92 refererar till Bessels ellipsoid, som orienterats så att geoidhöjderna någorlunda överensstämmer med dem i det äldre svenska geoidhöjdssystemet RAK 70. Härigenom var RN 92 avsett att kunna användas såväl till tredimensionella beräkningar, t.ex. i samband med GPS-mätning, som till höjdreduktion av konventionellt mätta längder.

2.4 Kommunala system

De kommunala systemen är 2-dimensionella plana kartesiska system (x, y). Sättet på vilket man definierat systemet varierar från kommun till kommun. De flesta systemen är anslutna till det äldre nationella systemet RT 38 eller något av de s.k. regionsystemen. På grund av den undermåliga geometriska kvaliteten i RT 38, har systemet i vissa fall anslutits på endast en punkt i kombination med att systemet orienterats med hjälp av ytterligare någon punkt, detta för att undvika att bristerna i RT 38 skulle fortplanta sig in i det lokala systemet. Det förekommer även kommunala system som definierats helt fristående från de nu nämnda nationella systemen. Genom att man vid etableringen av de kommunala stompunkterna, i enlighet med då gällande föreskrifter (VF/TFA) påfört projektionskorrektioner enligt Gauss-Krügers projektion, har de kommunala systemen erhållit geometriska egenskaper som överensstämmer med denna projektion. I de flesta fall finns inget givet sätt à priori att omvandla de plana (x, y)-koordinaterna till geodetiska och därmed inte heller till geocentriska koordinater.

2.5 Konventionella system

I fortsättningen används benämningen konventionella system för alla system som, i likhet med RT 90 och de kommunala systemen, tillkommit med hjälp av konventionell längd- och vinkelmätning.

3 Transformationsmetodik

Med *transformationsmetodik* avses de metoder som tillämpas när två eller flera horisontella system används inom samma geografiska område och man önskar räkna om koordinaterna för punkter inom området från ett system till ett annat.

Den vanligaste metoden för att transformera koordinater mellan globalt anpassade system och nationella datum av äldre snitt, i vårt fall mellan SWEREF 99 och RT 90, är att använda sig av en likformighetstransformation i tre dimensioner (3D Helmerttransformation). Det förutsätts att man har tillgång till koordinater av god kvalitet i båda systemen för ett antal punkter, i fortsättningen benämnda passpunkter. Punkterna skall helst ligga jämnt fördelade inom det område där sambandet skall användas. Förfarandet går till så att man först gör en inpassning baserad på passpunkterna, varvid de sju parametrarna som ingår i transformationen skattas: tre translationer, tre rotationer samt en skalkorrektion. Därefter använder man de skattade parametrarna för att transformera övriga punkter inom området. Även om tre passpunkter är tillräckligt för att bestämma parametrarna, bör antalet punkter inte understiga tio, men kan gärna vara fler beroende på omständigheterna. För att undvika tvetydigheter bör endast en uppsättning parametrar bestämmas för varje område.

I de närmast följande avsnitten görs en detaljerad genomgång av hur 3D Helmerttransformationen implementerats.

När det gäller transformation mellan SWEREF 99 och de kommunala systemen är frågeställningen mer komplicerad och detta behandlas i avsnitt 8 Projektionsinpassning .

4 Likformighetstransformation i 3 dimensioner

Av namnet *Likformighetstransformation i 3 dimensioner* – även kallad *3D Helmerttransformation* – framgår att denna transformation bevarar föremålens form. I vektorform kan det matematiska sambandet skrivas

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + (1+\delta)\mathbf{R}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_A \tag{4-1}$$

där vektorn med index A respektive B symboliserar koordinater för de två system transformationen sker emellan, där $(\Delta X,\ \Delta Y,\ \Delta Z)^T$ utgör translationsvektorn mellan systemens origon, δ skalkorrektionen och där rotationsmatrisen **R** definieras som

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_Z\mathbf{R}_Y\mathbf{R}_X = \begin{pmatrix} \cos\Omega_Z & \sin\Omega_Z & 0 \\ -\sin\Omega_Z & \cos\Omega_Z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\Omega_Y & 0 & -\sin\Omega_Y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\Omega_Y & 0 & \cos\Omega_Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Omega_X & \sin\Omega_X \\ 0 & -\sin\Omega_X & \cos\Omega_X \end{pmatrix} \tag{4-2}$$

och Ω_X, Ω_Y och Ω_Z utgör rotationen runt respektive axel.

I kompakt form kan (4-1) skrivas

$$\mathbf{X}_B = \Delta\mathbf{X} + (1+\delta)\mathbf{R}\mathbf{X}_A \tag{4-3}$$

En koordinattransformation kan tolkas på två sätt, antingen studerar man hur ett föremål ändras och förflyttas inom ett och samma koordinatsystem eller så studerar man ett och samma föremål sett från två skilda koordinatsystem. Inom geodesin sysslar vi med den sistnämnda frågeställningen dvs. vi ser de två inblandade referenssystemen som två olika modeller för beskrivning av verkligheten.

Den tredimensionella Helmerttransformationen fick mer allmän spridning inom geodesin i samband med att man började utnyttja satellitteknik vid postitionsbestämning. I inledningsskedet var varken mättekniken eller systemen speciellt noggranna, varför lineariserade varianter av formlerna (4-1) och (4-2) fick stor spridning, inte minst genom att dåvarande Defence Mapping Agency i USA publicerade en rapport DMA TECHNICAL REPORT tr8350.2-a med en lineariserad formel. Problemet med de förenklade formlerna är att de inte uppfyller de konsistenskrav som man har på beräkningarna idag. Dessutom är det krångligt att ta fram den stränga inversen till de lineariserade varianterna. Den stränga inverstransformationen till (4-1) är mycket enkel att beräkna tack vare att inversen till matrisen **R** är identisk med transponatet ($\mathbf{R}^{-1}=\mathbf{R}^T$). Inte heller finns det något motiv från effektivitetsynpunkt för att linearisera formel (4-1) eftersom de nio elementen i matrisen **R** beräknas endast en gång, vilket gör att det tar lika lång tid att transformera ett visst antal punkter vare sig man använder den fullständiga formeln eller en lineariserad variant.

Noteras bör att även om transformationen sker i tre dimensioner, är det i praktiken bara den horisontella komponenten som man är intresserad av att transformera. Höjdkomponenten kan närmast ses som ett nödvändigt ont. Som vi senare skall se, orsakar denna en hel del bekymmer både vid beräkningen av parametrarna och när man transformerar punkter.

4.1 Tillvägagångssätt för bestämning av ΔX, ΔY, ΔZ, Ω_X, Ω_Y, Ω_Z och δ

För att kunna beräkna numeriska värden på parametrarna krävs tillgång till passpunkter vars koordinater är kända i båda systemen. Som påpekats tidigare bör passpunkterna vara jämnt fördelade över det område inom vilket man önskar använda parametrarna. Genom att sätta in de kända koordinaterna för systemen *A* och *B* i formlerna (4-1) och (4-2), erhålls för varje passpunkt tre ekvationer, en för respektive av koordinaterna *X*, *Y* och *Z*, som bidrar till att bestämma konstanterna ΔX, ΔY, ΔZ, Ω_X, Ω_Y, Ω_Z och δ. Eftersom tre eller fler passpunkter används, kommer ekvationssystemet att bli överbestämt, varför man lämpligen löser det enligt minsta kvadratmetoden. På grund av att ekvationerna inte är linjära med avseende på rotationerna och skalan krävs viss handpåläggning för att lösa ut de obekanta parametrarna. Mer om detta i avsnitt 5 3D Helmertinpassning mellan två topocentriska system.

I närmast följande avsnitt redogörs för tillvägagångssättet vid beräkningen av de äldre samband mellan WGS 84 och RT 90 samt mellan SWEREF 93 och RT 90 (RR 92) som Lantmäteriet publicerat.

4.2 Sambandet WGS 84 – RT 90

I och med GPS-teknikens genombrott uppstod omedelbart ett behov att kunna räkna över GPS-bestämda koordinater till RT 90. 1989 tog Lantmäteriet, Hedling & Reit (1989), fram ett samband. WGS 84-koordinaterna var baserade på två skandinaviska dopplerkampanjer (SCANDOC) vari sju svenska punkter ingick. För inpassningen användes modulen Helmer i det s.k. Bernprogrammet. Noggrannheten var modest, med ett passfel på 2.4 meter per koordinat, vilket dock inte gjorde så mycket, eftersom sambandet var avsett för tillämpningar inom kartografi och navigation.

4.3 Sambandet SWEREF 93 – RT 90

1993 genomfördes med massivt stöd från Onsala Rymdobservatorium en mätkampanj baserad på GPS-teknik varvid 22 svenska stationer inmättes, merparten utgörande en delmängd av de nuvarande SWEPOS-stationerna. Lösningen räknades av Jan Johansson på Onsala i ITRF 91, epok 1992.5, och inpassades i EUREF 89 på 11 punkter i norra Europa med kända EUREF 89-koordinater. De så erhållna koordinaterna definierar SWEREF 93. För den horisontella komponenten uppskattades den interna noggrannheten (1σ, 2D) till 2 cm. Motsvarande noggrannhet i RT 90 var erfarenhetsmässigt 1-2 cm mellan närliggande punkter. På grund av nätets styrka, där mätningarna utjämnades tillsammans med de omgivande ländernas triangelnät, förväntades inte några större deformationer i RT 90 sett över hela landet, bortsett från en möjlig skalskillnad. Passfelens storlek borde gissningsvis ligga på 5-10 cm uttryckt som rms (2D).

Beräkningen av parametrarna gjordes även denna gång med programmodulen Helmer, i vilken Helmertformeln är implementerad helt i enlighet med ekvationerna (4-1) och (4-2). En analys visade att rms för de horisontella passfelen låg på dryga 13 cm, med ett maxfel i Kiruna på 35 cm, vilket var klart sämre än förväntningarna. En grafisk redovisning visade att restfelsvektorerna hade tydliga systematiska tendenser. Ytterligare undersökningar gav vid handen att en del av passfelen härrörde från brister i RT 90:s geodetiska definition.

Grunden till RT 90 var en utjämning på Hayfords ellipsoid av alla längd- och vinkelmätningar utförd med utgångskoordinater i ED 87. Skälet till detta var att en tillförlitlig geoidmodell för reduktion av längderna endast fanns att tillgå på Hayfords ellipsoid från 1910. När RT 90 introducerades var kravet från kartograferna att RT 90-koordinaterna skulle avvika så litet som möjligt från motsvarande RT 38-koordinater. Ett byte från Bessel 1841 till Hayford 1910 var inte möjligt med hänsyn till den snäva tidsplanen för den digitala kartans uppbyggnad. Tillskapandet av RT 90 innebar därför i viss mån att lyfta sig själv i håret. Jämfört med många andra länder var passfelens storlek i det svenska sambandet trots allt på en ganska modest nivå. I slutet av 1994 offentliggjordes det nya sambandet.

5 3D Helmertinpassning mellan två topocentriska system

5.1 Problemformulering

Frågan om den dåliga anpassningen kvarstod. Sannolikt orsakades den dåliga överensstämmelsen av brister i geoidmodellen och att skillnaden i krökningsradien mellan Bessel- och Hayfordellipsoiden hade spelat in på något sätt vid definitionen av RT 90. Båda dessa fenomen var klart höjdrelaterade. Vad som behövdes var ett inpassningsprogram där höjdtvånget kunde elimineras. Modulen Helmer klarade inte detta och något annat program fanns inte tillgängligt, varför det blev nödvändigt att utarbeta ett eget program. I detta program infördes höjderna i RT 90 som obekanta storheter. Något som inte var speciellt svårt, vilket inses om man studerar ekvationerna (2-1) och (4-1). Resultatet av detta experiment visade sig mycket framgångsrikt och rms-värdet gick ner från 13 till 5 cm.

Även om resultatet var tillfredsställande var ansatsen inte tillräckligt allmängiltig. En mer generell ansats vore att omformulera problemet så att höjderna viktas vid inpassningen i enlighet med deras förväntade noggrannhet. En annan brist hos både Helmer och det aktuella programmet var att rotationsparametrarna avsåg de geocentriska koordinataxlarna och translationerna skiftet mellan ellipsoidernas centrum. Om inpassningen sker mellan två globalt anpassade system med passpunkter distribuerade över flera kontinenter är denna typ av parametrar väl lämpade för att beskriva relationen mellan systemen, men i övriga fall täcker området som omfattas av inpassningen en relativt liten del av jordytan. Tittar man på en jordglob, inser man att detta gäller även för kontinentala system som ED 50 och NAD 83.

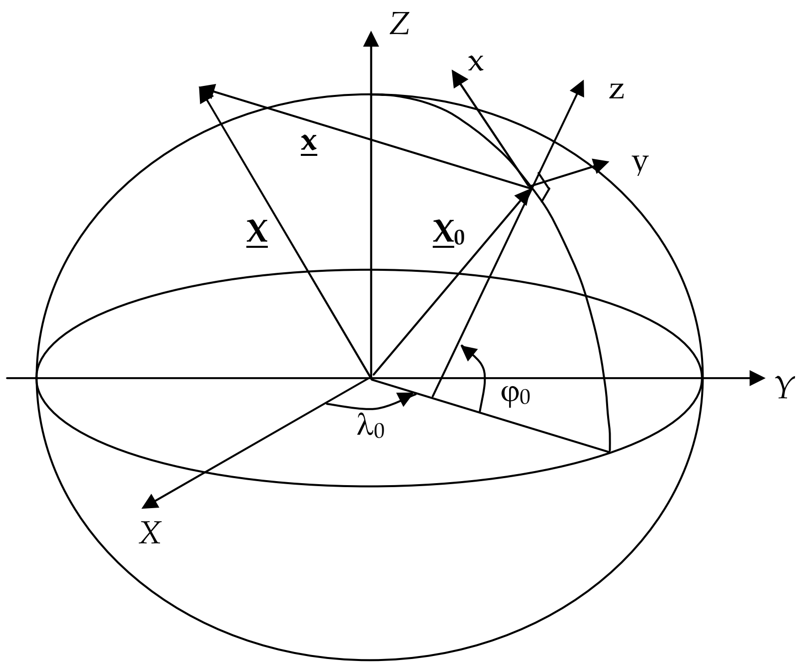
För system som täcker en mindre del av jordytan finns det klara fördelar med att införa ett topocentriskt system för respektive ellipsoid, se figur 2, och utföra inpassningen mellan dessa system, vilket som senare skall visas underlättar förståelsen för inpassningsprocessen. Under förutsättning att koordinaterna för de topocentriska systemens origo väljs på rätt sätt, kommer rotationen runt z-axeln att svara mot den azimutala rotationen mellan systemen medan rotationerna runt de övriga två axlarna beskriver den lokala lutningen mellan ellipsoidytorna i området. Translation (Δz) längs den topocentriska z-axeln slutligen, ger avståndet mellan ellipsoidytorna i omgivningen av topocentrum. Som vi senare skall se är translationen Δz och skalkorrektionen δ starkt kopplade till varandra.

Bland fördelarna finns vidare en förbättrad numerisk skärpa i beräkningarna, jämför tyngdpunktsreduktion vid 2D Helmertinpassning.

5.2 Samband mellan topocentriska system

I det följande redovisas hur sambandet mellan de topocentriska systemen kan härledas och hur de ur en inpassning erhållna parametrarna kan omvandlas till motsvarande geocentriska parametrar.

I fortsättningen använder vi versaler för de geocentriska koordinaterna och gemener för de topocentriska. De topocentriska systemen placeras med origo i punkten (φ_0, λ_0, 0) på respektive ellipsoids yta, med z-axeln sammanfallande med den utåtriktade ellipsoidnormalen, x-axeln i meridianplanet och y-axeln orienterad så att systemet blir vänsterorienterat. Det topocentriska xy-planet är följaktligen tangentplan till ellipsoiden, se figur 2.



***Figur 2**: Topocentrisk och geocentriskt koordinatsystem*

Ur figuren kan vi härleda följande samband mellan vektorerna $\underline{\mathbf{X}}$, $\underline{\mathbf{X}}_0$ och $\underline{\mathbf{x}}$ samt mellan enhetsvektorerna i det geocentriska och det topocentriska systemet.

$$\underline{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{X}}_0 + \underline{\mathbf{x}} \tag{5-1}$$

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{e}}_x &= -\sin\varphi_0 \cos\lambda_0 \underline{\boldsymbol{e}}_X - \sin\varphi_0 \sin\lambda_0 \underline{\boldsymbol{e}}_Y + \cos\varphi_0 \underline{\boldsymbol{e}}_Z \\ \underline{\boldsymbol{e}}_y &= -\sin\lambda_0 \underline{\boldsymbol{e}}_X + \cos\lambda_0 \underline{\boldsymbol{e}}_Y \\ \underline{\boldsymbol{e}}_z &= \quad \cos\varphi_0 \cos\lambda_0 \underline{\boldsymbol{e}}_X + \cos\varphi_0 \sin\lambda_0 \underline{\boldsymbol{e}}_Y + \sin\varphi_0 \underline{\boldsymbol{e}}_Z \end{aligned} \tag{5-2}$$

Med hjälp av ekvationerna (5-1), (5-2) kan vi nu skriva

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin\varphi_0 \cos\lambda_0 & -\sin\lambda_0 & \cos\varphi_0 \cos\lambda_0 \\ -\sin\varphi_0 \sin\lambda_0 & \cos\lambda_0 & \cos\varphi_0 \sin\lambda_0 \\ \cos\varphi_0 & 0 & \sin\varphi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{5-3}$$

Vi inför beteckningen $\mathbf{M}_0$ för matrisen i ekvation (5-3) som överför de topocentriska vektorkomponenterna till motsvarande geocentriska. Som synes påminner ekvationerna (4-1) och (5-3) om varandra. Observera dock att i ekvation (5-3) har de två inblandade systemen olika orientering. I likhet med matrisen **R** är inversen till $\mathbf{M}_0$ lika med transponatet ($\mathbf{M}_0^{-1}=\mathbf{M}_0^T$).

För omvandling av geocentriska koordinater till topocentriska gäller formeln

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{M}_0^{-1} \left[\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} \right] \tag{5-4}$$

Innan de geocentriska koordinaterna kan omvandlas till topocentriska måste lämpliga värden tilldelas φ_0 och λ_0. Teoretiskt sett kan man välja godtyckliga värden för respektive ellipsoid (inte heller behöver h = 0), men skall övergången till topocentriska system vara verkningsfull, bör *samma numeriska värden (φ_0, λ_0, 0) tilldelas båda systemen, varigenom det topocentriska systemets axlar får samma orientering relativt det geocentriska systemet i både system A och system B.* Vidare är det lämpligt att välja en punkt mitt i inpassningsområdet, t.ex. tyngdpunkten för passpunkternas horisontella koordinater i det system som bedöms ha de mest pålitliga koordinaterna.

Vi får alltså

$$\mathbf{X}_A = \mathbf{X}_{0A} + \mathbf{M}_0 \mathbf{x}_A \qquad \text{och} \qquad \mathbf{x}_A = \mathbf{M}_0^{-1}(\mathbf{X}_A - \mathbf{X}_{0A}) \tag{5-5}$$

respektive

$$\mathbf{X}_B = \mathbf{X}_{0B} + \mathbf{M}_0 \mathbf{x}_B \qquad \text{och} \qquad \mathbf{x}_B = \mathbf{M}_0^{-1}(\mathbf{X}_B - \mathbf{X}_{0B}) \tag{5-6}$$

Observera, att även om samma numeriska värden (φ_0, λ_0, 0) används i både system A och system B kommer vektorn $\mathbf{X}_{0A}$ att skilja sig från vektorn $\mathbf{X}_{0B}$ eftersom olika ellipsoider används vid beräkningen.

Efter omvandlingen till topocentriska koordinater görs inpassningen. Beteckna parametrarna för translationerna och rotationerna mellan de topocentriska systemen med Δx, Δy, Δz respektive ω_x, ω_y, ω_z. Skalkorrektionen δ är densammma oberoende av om inpassningen sker mellan de geocentriska eller topocentriska systemen.

I analogi med det geocentriska fallet kan likformighetstransformationen mellan de två topocentriska systemen skrivas

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} + (1+\delta)\,\mathbf{R}_{Topo} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_A \quad \text{alternativt} \qquad \mathbf{x}_B = \Delta\mathbf{x} + (1+\delta)\mathbf{R}_{Topo}\mathbf{x}_A \tag{5-7}$$

där

$$\mathbf{R}_{Topo} = \mathbf{R}_z(\omega_z)\mathbf{R}_y(\omega_y)\mathbf{R}_x(\omega_x) =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\omega_z & \sin\omega_z & 0 \\ -\sin\omega_z & \cos\omega_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega_y & 0 & -\sin\omega_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\omega_y & 0 & \cos\omega_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega_x & \sin\omega_x \\ 0 & -\sin\omega_x & \cos\omega_x \end{pmatrix} \tag{5-8}$$

Som påpekades tidigare medför valet av identiska värden (φ_0, λ_0, 0) i origodefinitionen för system A och system B att rotationsparametrarna blir lättare att tolka. T.ex. motsvarar rotationen runt den topocentriska z-axeln en azimutal rotation mellan systemen. Som framgår av ekvation (5-7) svarar Δz mot separationen mellan ellipsoidytorna i omgivningen av de topocentriska origona.

Genom att sätta in de kända koordinaterna i ekvation (5-7) erhålls för varje passpunkt tre ekvationer. Om antalet punkter är ≥ 3 har vi fler villkor än obekanta parametrar varför ekvationssystemet löses enligt minsta kvadratmetoden, vilket innebär att man till varje ekvation adderar en s.k. förbättring och den lösning väljs som minimerar summan av kvadraterna på alla förbättringarna. Som nämndes inledningsvis är noggrannheten i passpunkternas höjder normalt sämre än i planlägena. Det gäller i synnerhet för de konventionella systemen, beroende dels på att passpunkterna ofta inte är avvägda, dels på brister i geoidmodellen. För att undvika att den dåliga anpassningen i höjd spiller över på anpassningen i de horisontella komponenterna måste höjdanpassningen viktas ner. För små inpassningsområden duger det att vikta ner ekvationen för z-komponenten för system *B*. På grund av jordkrökningen, kommer axelriktningarna nord-, ost- och upp för punkter långt bort från topocentrum att avvika från det topocentriska systemets axlar. Därmed blir viktsättningen inte helt korrekt. För att råda bot på detta problem, återför vi som första steg ekvation (5-7) till system *B*:s geocentriska axelriktningar genom att multiplicera med matrisen $\mathbf{M}_0$, som erhålls genom att sätta in latitud- och longitudvärdena för topocentrum. Vi passar även på att kasta om vänster- och högerleden. För den i:te passpunkten får vi då

$$\mathbf{M}_0(\Delta\mathbf{x} + (1+\delta)\mathbf{R}_{Topo}\mathbf{x}_{iA}) = \mathbf{M}_0\mathbf{x}_{iB} \tag{5-9}$$

Vi vill nu överföra ekvation (5-9) till den i:te punktens axelriktningar (nord, ost, upp). Detta uppnår vi genom att multiplicera ekvation (5-9) med den matris, som erhålls genom att sätta in punkten i:s latitud- och longitudvärden för system B i uttrycket för den inversa $\mathbf{M}$-matrisen. Genom att slutligen addera förbättringsvektorn $\mathbf{v}_i$ kan de tre observationsekvationerna för den i:te punkten skrivas

$$\mathbf{M}_{iB}^{-1}\mathbf{M}_0(\Delta\mathbf{x}+(1+\delta)\mathbf{R}_{Topo}\mathbf{x}_{iA}) = \mathbf{M}_{iB}^{-1}\mathbf{M}_0\mathbf{x}_{iB}+\mathbf{v}_i \tag{5-10}$$

Ekvationerna kan nu tilldelas vikter som svarar mot de ingående koordinaternas kvalitet. Vi kan konstatera att med vårt sätt att utforma observationsekvationerna, finns det ingen korrelation mellan observationerna annat än den som möjligen orsakats av det sätt koordinaterna en gång kom till.

När det gäller de konventionella systemen, kan vi utgå ifrån att felen i plan- och höjdkomponenten är okorrelerade. Eftersom plankoordinaterna med största sannolikhet tillkommit genom ett utjämningsförfarande, finns det troligen korrelation mellan felen i olika punkters koordinater. Det är dock mindre sannolikt att dessa korrelationer finns att tillgå. Detsamma gäller för de två plankomponenterna för respektive punkt. Till följd av den påförda geoidkorrektionen, är det vidare troligt att felen i höjd uppvisar viss korrelation mellan olika punkter. Att försöka beakta detta är svårt och tillför knappast något till inpassningsproblemet.

När det gäller SWEREF-systemen och liknande globalt anpassade system, är felnivån så låg att koordinaterna i detta sammanhang kan betraktas som felfria. Det känns därför lämpligt att vid inpassningen alltid välja dessa system som det system man transformerar från (system A), därigenom kommer förbättringarna att adderas till de konventionella systemens koordinater.

Slutsatsen av ovanstående resonemang blir att man utan allvarliga inskränkningar kan betrakta varians/kovariansmatrisen som diagonal, vilket innebär att man vid uppställning av observationsekvationerna kan nöja sig med att dividera respektive ekvation med sitt à priori-medelfel.

5.3 Linearisering

Nästa problem att hantera är det faktum att ekvation (5-10) inte är linjär med avseende på de obekanta storheterna Δx, Δy, Δz, ω_x, ω_y, ω_z och δ. Detta löses på sedvanligt sätt genom linearisering kombinerad med iteration. Metoden är gynnsam i vårt problem, eftersom de sökta rotationerna och skalkorrektionen normalt är små storheter, men fungerar även utmärkt vid godtyckligt stora rotationer och skaländringar.

Förfarandet går i korthet till på följande sätt. Beteckna uttrycket inom parentes i ekvation (5-10) med $\mathbf{F}(\Delta x,\Delta y,\Delta z,\omega_x,\omega_y,\omega_z,\delta)$. Vi får då

$$\mathbf{F}(\Delta x,\Delta y,\Delta z,\omega_x,\omega_y,\omega_z,\delta) = \Delta\mathbf{x}+(1+\delta)\mathbf{R}_{Topo}\mathbf{x}_{iA} \tag{5-11}$$

Vi utför nu en Taylorutveckling kring närmevärdena

$(\Delta x)_0$, $(\Delta y)_0$, $(\Delta z)_0$, $(\omega_x)_0$, $(\omega_y)_0$, $(\omega_z)_0$ och $(\delta)_0$

$$\begin{aligned}\mathbf{F} = \mathrm{F}_0 &+ (\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \Delta x})_0 d\Delta x + (\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \Delta y})_0 d\Delta y + (\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \Delta z})_0 d\Delta z + \\ &+ (\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \omega_x})_0 d\omega_x + (\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \omega_y})_0 d\omega_y + (\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \omega_z})_0 d\omega_z + (\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \delta})_0 d\delta\end{aligned} \tag{5-12}$$

där korrektionerna *dΔx*, *dΔy*, *dΔz*, $d\omega_x$,, $d\omega_y$,, $d\omega_z$ och *dδ* är de obekanta och där närmevärdet $\mathbf{F}_0$ definieras som

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}((\Delta x)_0, (\Delta y)_0, (\Delta z)_0, (\omega_x)_0, (\omega_y)_0, (\omega_z)_0, (\delta)_0)$$

För de partiella derivatorna får vi

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \Delta x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \Delta y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \Delta z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \delta} = \mathbf{R}_{Topo}\mathbf{x}_A \;;$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \omega_{\mathbf{x}}} = (1+\delta)\mathbf{R}(\omega_z)\mathbf{R}(\omega_y)\frac{\partial \mathbf{R}(\omega_x)}{\partial \omega_x}\mathbf{x}_A \text{ där } \frac{\partial \mathbf{R}(\omega_x)}{\partial \omega_x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\omega_x & \cos\omega_x \\ 0 & -\cos\omega_x & -\sin\omega_x \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \omega_y} = (1+\delta)\mathbf{R}(\omega_z)\frac{\partial \mathbf{R}(\omega_y)}{\partial \omega_y}\mathbf{R}(\omega_x)\mathbf{x}_A \text{ där } \frac{\partial \mathbf{R}(\omega_y)}{\partial \omega_y} = \begin{pmatrix} -\sin\omega_y & 0 & -\cos\omega_y \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos\omega_y & 0 & -\sin\omega_y \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \omega_z} = (1+\delta)\frac{\partial \mathbf{R}(\omega_z)}{\partial \omega_z}\mathbf{R}(\omega_y)\mathbf{R}(\omega_x)\mathbf{x}_A \text{ där } \frac{\partial \mathbf{R}(\omega_z)}{\partial \omega_z} = \begin{pmatrix} -\sin\omega_z & \cos\omega_z & 0 \\ -\cos\omega_z & -\sin\omega_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Insättning av uttrycket till höger om likhetstecknet i ekvation (5-11) i ekvation (5-10) ger oss de slutliga observationsekvationerna. Efter att ha skattat de obekanta korrektionerna med hjälp av minsta kvadratmetoden adderas dessa värden till närmevärdena och hela förfarandet upprepas så länge korrektionerna lämnar ett signifikant bidrag till de skattade parametrarna. Det visar sig att det fungerar utmärkt att sätta alla närmevärden till noll i första iterationssteget.

Anmärkning: Uppställningen av observationsekvationerna tog sin utgångspunkt från de topocentriska systemen. Om man föredrar att formulera ekvationerna för geocentriska parametrar skall man i stället multiplicera ekvation (4-1) med inversen (transponatet) till matrisen $\mathbf{M}_{iB}$. De tre observationsekvationerna för punkten blir då

$$\mathbf{M}_{iB}^{-1}(\Delta\mathbf{X} + (1+\delta)\mathbf{R}\mathbf{X}_{iA}) = \mathbf{M}_{iB}^{-1}\mathbf{X}_{iB} + \mathbf{v}_i \tag{5-13}$$

Nackdelen med denna ansats är att man frånhänder sig den möjlighet till analys av inpassningsresultatet som den topocentriska ansatsen erbjuder, se detaljstudierna i ett senare avsnitt (7 Detaljstudie av 3D Helmertinpassning med data hämtade ur verkligheten).

6 Beräkning av transformationsparametrar

De parametrar som erhålls med det förfarande som beskrivits i det föregående kan användas tillsammans med ekvation (5-7) för att transformera topocentriska koordinater, vilket inte är speciellt användbart. I stället skall vi härleda en metod för att ur de topocentriska parametrarna beräkna parametrar för transformation mellan de geocentriska systemen.

6.1 Beräkning av de geocentriska parametrarna ur de topocentriska

Vi börjar med att ersätta $\mathbf{x}_A$ och $\mathbf{x}_B$ i ekvation (5-7) med uttrycken från (5-5) och (5-6). För den som tvivlar på att skalkorrektionen måste vara densamma i (4-1) och (5-7) betecknar vi den topocentriska skalan med δ_{Topo}. Efter viss hyfsning av uttrycket enligt (5-7) får vi då

$$\mathbf{X}_B = \mathbf{X}_{0B} + \mathbf{M}_0\Delta\mathbf{x} - (1+\delta_{Topo})\mathbf{M}_0\mathbf{R}_{Topo}\mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{X}_{0A} + (1+\delta_{Topo})\mathbf{M}_0\mathbf{R}_{Topo}\mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{X}_A \tag{6-1}$$

Ekvation (6-1) skall i likhet med (4-1) gälla för alla punkter. Genom att jämföra ekvation (6-1) och (4-1) är det uppenbart att

$$\delta = \delta_{Topo} \tag{6-2}$$

$$\Delta\mathbf{X} = \mathbf{X}_{0B} + \mathbf{M}_0\Delta\mathbf{x} - (1+\delta_{Topo})\mathbf{M}_0\mathbf{R}_{Topo}\mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{X}_{0A} \tag{6-3}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{M}_0\mathbf{R}_{Topo}\mathbf{M}_0^{-1} \tag{6-4}$$

Translationsvektorn $\Delta\mathbf{X}$ kan med hjälp av ekvation (6-4) ytterligare förenklas till

$$\Delta\mathbf{X} = \mathbf{X}_{0B} + \mathbf{M}_0\Delta\mathbf{x} - (1+\delta)\mathbf{R}\mathbf{X}_{0A} \tag{6-5}$$

Anmärkning: Man kan lätt förledas att tro att om man transformerar koordinaterna för $\mathbf{X}_{0A}$ får man koordinaterna $\mathbf{X}_{0B}$ men så är inte fallet eftersom de två topocentra avser olika punkter i det tredimensionella rummet.

Det är lämpligt att först lösa ut rotationerna Ω_X, Ω_Y och Ω_Z, eftersom dessa behövs för att beräkna translationerna enligt ekvation (6-5).

Vi börjar med att multiplicera ihop de algebraiska uttrycken för de tre matriserna $\mathbf{R}_X$, $\mathbf{R}_Y$ och $\mathbf{R}_Z$ i vänsterledet av ekvation (6-4), jämför ekvation (4-1). På liknande sätt räknar vi fram numeriska värden på de nio matriselementen i högerledet. Vi får då

VL =

$$\begin{pmatrix} \cos\Omega_Y \cos\Omega_Z & \cos\Omega_X \sin\Omega_Z + \sin\Omega_X \sin\Omega_Y \cos\Omega_Z & -\cos\Omega_X \sin\Omega_Y \cos\Omega_Z + \sin\Omega_X \sin\Omega_Z \\ -\cos\Omega_Y \sin\Omega_Z & \cos\Omega_X \cos\Omega_Z - \sin\Omega_X \sin\Omega_Y \sin\Omega_Z & \sin\Omega_X \cos\Omega_Z + \cos\Omega_X \sin\Omega_Y \sin\Omega_Z \\ \sin\Omega_Y & -\sin\Omega_X \cos\Omega_Y & \cos\Omega_X \cos\Omega_Y \end{pmatrix} \tag{6-6}$$

$$\mathbf{HL} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \tag{6-7}$$

Jämförelse av vänster- och högerleden ger $\Omega_Y = \arcsin R_{31}$. Med känt värde på Ω_Y kan Ω_X beräknas ur R_{32} och Ω_Z ur R_{21}. En komplikation är att arcussinus inte är entydig. Normalt är rotationsvinklarna mycket små vilket innebär att man kan välja de värden som ligger i intervallet $-\pi/2$ till $\pi/2$. Vill man ha en lösning som gäller för godtyckligt stora rotationer blir det betydligt krångligare eftersom det finns åtta kombinationer att välja mellan varav inte alla återskapar värdena som står i högerledet. För vissa vinklar, t.ex. om $\Omega_Y \approx \pm\pi/2$ måste man dessutom välja en annan ansats än den nu föreslagna.

Slutligen beräknar vi de numeriska värdena för translationsvektorn med hjälp av ekvation (6-5).

6.2 Beräkning av inversparametrar

Ibland finns behov av att transformera koordinater i motsatt riktning mot den som de framräknade parametrarna avser. Man kan tänka sig tre alternativa tillvägagångssätt för att lösa detta problem.

1. *Använd samma parametrar men invertera ekvation. (4-1). Dvs. använd formeln*

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_A = \frac{\mathbf{R}^{-1}}{(1+\delta)} \left[\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_B - \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} \right] \tag{6-8}$$

Som tidigare nämnts är inversen av rotationsmatrisen $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T = (\mathbf{R}_Z\ \mathbf{R}_Y\ \mathbf{R}_X)^T = (\mathbf{R}_X)^T\ (\mathbf{R}_Y)^T\ (\mathbf{R}_Z)^T$ vilket ger

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Omega_X & -\sin\Omega_X \\ 0 & \sin\Omega_X & \cos\Omega_X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\Omega_Y & 0 & \sin\Omega_Y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\Omega_Y & 0 & \cos\Omega_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\Omega_Z & -\sin\Omega_Z & 0 \\ \sin\Omega_Z & \cos\Omega_Z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6-9}$$

2. *Använd ekvation. (4-1) men räkna fram de inversa parametrarna genom att göra om inpassningen i den andra riktningen, dvs. kasta om A och B i ekvation. (4-1).*
3. *Använd ekvation. (4-1) men räkna fram de inversa parametrarna ur den matematiskt/numeriska inversen.*

I alternativ 3 tillämpas samma metod som vid beräkningen av geocentriska parametrar ur de topocentriska, bara med den skillnaden att vid beräkningen av de inversa rotationsparametrarna transponerar man först matrisen med de numeriskt beräknade matriselementen, se ekvation (6-7). Den inversa translationsvektorn erhålls ur de ursprungliga translationerna med hjälp av formeln

$$\begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}_{\text{invers}} = -\frac{\mathbf{R}_{invers}}{(1+\delta)} \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} \tag{6-10}$$

där δ är den ursprungliga skalkorrektionen. Den inversa skalkorrektionen, slutligen, fås ur

$$\delta_{invers} = -\frac{\delta}{(1+\delta)} \tag{6-11}$$

Med undantag för det vid Lantmäteriet utvecklade programmet GTRANS är det troligen ytterst få program som kan hantera inverstransformationen enligt alternativ 1. Man är därför i det generella fallet hänvisad till något av de två andra alternativen. Problemet med alternativ 2 är, att på grund av att de två minsta-kvadrat-lösningarna inte är helt symmetriska, kommer de parametrar man erhåller vid den inversa inpassningen inte att stämma med den stränga inversen. Slutsatsen blir alltså att man bör välja alternativ 3 om beräkningskonsistens eftersträvas. Något som leder oss in på nästa frågeställning.

6.3 Beräkningskonsistens vid 3D Helmert

Koordinater grundade på geodetiska mätningar är alltid behäftade med fel. Felens storlek varierar och kan ha många orsaker. Säkert är att man alltid eftersträvar bästa möjliga noggrannhet med hänsyn tagen till kostnader och övriga förutsättningar. Geodeterna, som tillhandahållare av den grundläggande geodetiska infrastrukturen, måste sträva efter att de metoder och produkter vi erbjuder tillgodoser *alla* avnämares noggrannhetsbehov. Det finns ingen anledning att låta fel genom förenklade formler eller andra brister i den numeriska hanteringen adderas i felbudgeten.

I den geodetiska vardagen lagras och redovisas koordinater normalt med så många siffror att millimeterkonsistens uppnås. Detta innebär att latitud och longitud bör lagras med minst 5 decimaler i sekunddelen eller motsvarande. I vissa studier t.ex. baserade på SWEPOS-data har man anledning att redovisa tiondels millimeter vilket kräver 6 decimaler i sekunddelen. Om transformationen av koordinaterna görs i flera steg, där man lagrar mellanresultat som en redigerad utskrift i en textfil, bör dessa koordinater ges minst en extra decimal.

Det är nödvändigt att de metoder geodeterna erbjuder användarna samt att de datorprogram som används vid hanteringen av koordinater har en beräkningskonsistens som svarar mot den högsta förväntade noggrannheten. Datorernas kraftfullhet gör att det sedan länge inte finns några beräkningstekniska motiv för att göra avkall på detta.

3D Helmerttransformation är ett av de mest misshandlade förfarandena inom geodesin. Algoritmen är föremål för ett antal olika förenklingar. Dessutom finns ett visst godtycke hur man definierar ordningen som rotationerna skall utföras i samt vilken rotationsriktning som räknas positiv. Genom att i olika sammanhang tillämpa olika konventioner och approximationer riskerar de numeriska resultaten att bli inkonsistenta.

Vanligtvis när man skall göra en 3D Helmerttransformation använder man sig av redan tidigare beräknade och publicerade parametrar. Om det program man använder för att transformera koordinaterna inte tillämpar samma konventioner som programmet som användes för att skatta parametrarna, finns det risk för att resultatet inte blir helt korrekt. Vi skall undersöka några av de vanligaste fallgroparna.

Avser parametrarna transformation från system A till system B eller tvärtom? Inte alltför ovanligt att man tabbar sig på denna punkt. Om resultatet verkar galet men tycks bli OK om man byter tecken på alla parametrar kan det vara en indikation, men stanna inte vid detta utan gå på djupet och klara ut vad som verkligen är orsaken. Att rakt av bara använda parametrarna med omvänt tecken kan ge upphov till mer eller mindre stora fel i koordinaterna. Fuskar man på det viset med det officiella sambandet SWEREF 99 ↔ RR 92 blir felet drygt 1 cm, men är rotationerna större växer felet mycket snabbt (kvadratiskt).

En annan oklarhet som kan uppträda är om rotationerna räknas positiva medurs eller moturs: Båda varianterna förekommer.

Som nämnts i ett tidigare avsnitt är en vanligt förekommande förenkling av beräkningsalgoritmen att högre ordningens termer försummas i rotationsmatrisen. Man får då

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & \Omega_Z & -\Omega_Y \\ -\Omega_Z & 1 & \Omega_X \\ \Omega_Y & -\Omega_X & 1 \end{pmatrix} \tag{6-12}$$

Ibland har man gjort en ytterligare "förenkling" genom att placera skalfaktorn 1+δ på matrisens diagonal. Nyttan av dessa modifieringar är svår att inse. Som påpekades tidigare uppnår man t.ex. inte någon tidsvinst eftersom matrisens nio element endast beräknas en gång oberoende av antalet transformerade punkter. Formel (6-12) ser bedrägligt enkel ut, men den som är intresserad kan ju pröva att härleda den stränga inversen till denna matris. Felet orsakat av lineariseringen växer med kvadraten på rotationernas storlek. För det officiella sambandet SWEREF 99 ↔ RR 92 blir felet av storleken 2-3 mm. Som vi skall se, när vi kommer till samband mellan SWEREF 99 och de kommunala system, har en del system en azimutal rotation som kan uppgå till flera grader. Vid en rotation på 100 bågsekunder (drygt 30 mgon) blir felet 0,3 m och vid 1 gon handlar det om storleksordningen 300 m.

Nästa problem handlar om hur rotationsmatrisen **R** är definierad. Vi har hittills förutsatt att de tre delmatrisernas multiplikationsordning är $\mathbf{R}_Z\mathbf{R}_Y\mathbf{R}_X$. Teoretiskt finns det sex olika sätt att multiplicera samman matriserna. Åtminstone följande två varianter har förekommit i olika internationella sammanhang, $\mathbf{R}_X\mathbf{R}_Y\mathbf{R}_Z$ och $\mathbf{R}_Y\mathbf{R}_X\mathbf{R}_Z$. Effekten av att använda fel rotationsordning är liten. Så länge rotationerna är små (<10 bågsekunder) rör det sig om några millimeter, men felet växer även här kvadratiskt med rotationernas storlek. För rotationer på nivån 1 grad handlar det om 100-tals meter.

Den totala bristen på allmänt vedertagna konventioner för 3D Helmert leder oss till följande förhållningssätt:

Lämna aldrig ut parametrar utan att bifoga ett antal punkter med koordinater i det system transformationen skall ske från samt med koordinater som erhållits genom transformation med användning av parametrarna. På samma sätt skall man givetvis avkräva den som lämnar ut parametrar ett antal punkter för kontroll av att parametrar och programvaran är konsistenta. Man bör även ange det geografiska giltighetsområdet för parametrarna, i princip det område som spänns upp av passpunkterna. T.ex. kan parametrarna vara framtagna i ett projekt med mycket begränsad geografisk utbredning som ett vägbygge, men av de angivna systemnamnen kan man lätt få intrycket att de gäller generellt mellan systemen om inget annat anges.

Slutligen en frågeställning som det inte är alltför ovanligt att man drabbas av, nämligen att punkterna som skall transformeras saknar höjder eller att de höjder man har att tillgå är höjder över havet. Att detta kan påverka noggrannheten i den horisontella positionen beror på att de två inblandade ellipsoidytorna oftast inte är helt parallella i det aktuella området. Felets storlek beror linjärt av lutningen mellan ellipsoidytorna i området och hur felaktig höjden är. Som exempel kan nämnas att om man transformerar de 20 SWEPOS-stationerna som används i detaljstudien i nästa avsnitt med alla höjder satta till noll blir felet som störst 11 mm. Gissningsvis ger en försummad geoidhöjd ett fel <1 mm.

7 Detaljstudie av 3D Helmertinpassning med data hämtade ur verkligheten

I detta avsnitt skall vi se hur den modifierade ansatsen för beräkning av 3D Helmertparametrarna fungerar i praktiken.

Av vad som framgår av tidskriftsartiklar och annan litteratur, såväl inom Sverige som på det internationella planet, tycks en djupare förståelse av hur beräkningen av transformationsparametrarna vid 3D Helmert fungerar i geodetiska sammanhang vara förvånansvärt liten. Med enkelt exempel illustreras nedan hur de olika parametrarna påverkar inpassningen.

Steg för steg redovisas den effekt de olika parametrarna har på inpassningsresultatet. Utgångspunkt för studien är beräkningen av parametrarna för transformationen mellan SWEREF 99 och RR 92 grundad på de 20 fundamentalpunkterna i SWEPOS-nätet. Exemplet visar den successiva förbättringen av passfelen efterhand som fler parametrar införs. Som sista steg studeras konsekvensen av att höjdtvånget avlägsnas.

För att göra det hela så konkret som möjligt används följande enkla mekaniska modell. Vi betraktar GRS 80- och Bessel-ellipsoiderna som två helt fristående modeller, som båda ger anspråk på att så gott det går, beskriva verkligheten. För varje passpunkt tänker vi att det på ytan av respektive ellipsoid är monterat en antenn vars läge stämmer överens med de geodetiska koordinaterna (φ, λ) och vars antennhöjd svarar mot punktens höjd över ellipsoiden. På GRS 80 använder vi SWEREF 99-koordinaterna och på Bessel RR 92-koordinaterna.

Att göra en inpassning innebär att vi försöker placera in ellipsoiderna relativt varandra på ett sätt som minimerar summan av kvadraterna av avstånden mellan antennspetsarna för respektive passpunkt, givetvis med beaktande av den begränsning i rörelsefrihet som valet av transformationsparametrar innebär. Skattar vi t.ex. inga rotationer i inpassningen måste vi hela tiden hålla ellipsoidernas axlar parallella.

7.1 0-parameterinpassning

Som första steg tänker vi oss en inpassning där alla sju parametrarna är satta till värdet 0, dvs. ellipsoiderna är placerade koncentriskt med sammanfallande axelriktningar och utan skalskillnad. Tolkat som en transformation betyder detta fall att vi tar SWEREF 99-koordinaterna rakt av och betraktar dem som RR 92-koordinater. Komponenterna Nord, Ost och Upp (kortare (N,E,U)) i tabell 1 representerar vektorn som går från spetsen av antennen på Besselellipsoiden till motsvarande antennspets på GRS 80-ellipsoiden. Axelriktningarna för (N,E,U) definieras av RR 92-koordinaterna på Bessel-ellipsoiden.

Felteoretiskt är (N,E,U) en förbättringsvektor, jämför ekvation (5-10), men i tillämpningen av inpassningen råder dualitet beträffande vad som skall förbättras. I vårt fall kan man t.ex. fråga sig om det är de transformerade SWEREF 99-koordinaterna som skall förbättras för att få överensstämmelse med RR 92, eller om det är RR 92 som skall rätas upp? I många sammanhang kallar man vektorkomponenterna passfel eller residualer utan att byta tecken på dem.

Som vi ser av tabell 1 verkar Uppkomponentens storlek rimlig eftersom

Tabell 1: Passfel efter 0-parameterinpassning (koncentriska ellipsoider) (enhet: meter).

Station	Topocentriska komponenter			
	North	**East**	**Up**	**2D**
ARJE.0	-200.963	-172.885	707.434	265.095
KIRU.0	-215.782	-191.545	702.039	288.534
OVER.0	-193.129	-210.784	705.912	285.883
SKEL.0	-178.458	-201.779	710.361	269.373
VILH.0	-182.570	-165.654	712.106	246.522
BORA.0	-97.265	-159.096	723.630	186.473
JONK.0	-96.893	-168.657	723.573	194.509
SUND.0	-150.196	-183.189	717.170	236.890
HASS.0	-75.938	-171.236	724.671	187.319
NORR.0	-105.719	-183.842	722.483	212.072
ONSA.0	-93.692	-152.141	723.700	178.676
VANE.0	-110.142	-148.822	722.518	185.147
KARL.0	-118.826	-158.470	722.096	198.072
LEKS.0	-134.007	-165.428	720.212	212.896
LOVO.0	-113.338	-194.270	721.344	224.914
MART.6	-129.985	-185.447	719.883	226.465
OSKA.0	-86.534	-186.813	723.872	205.882
OSTE.0	-168.486	-155.984	714.992	229.605
SVEG.0	-150.578	-159.589	717.914	219.413
UMEA.0	-164.617	-193.711	714.041	254.209
R.m.s.	**144.249**	**176.313**	**717.524**	**227.803**

vi vet att Besselellipoidens ekvatorsradie är ca 740 m mindre än den för GRS 80.

7.2 1-parameterinpassning

Av tabell 1 inser vi vidare, att om vi flyttar Bessel-ellpsoiden längs normalen definierad av passpunkternas tyngdpunkt, så att den kommer närmare GRS 80-ellipsoidens yta, kommer Upp-komponenten att minska och därmed kvadratsumman av passfelen. Detta åstadkommer vi genom att göra en inpassning där vi släpper fri den topocentriska parametern Δz. Resultat av detta framgår av tabell 2.

Som väntat förbättras Upp-komponenten radikalt men en förbättring sker även i Nord. Låt oss även ta en titt på transformationsparametrarna, som i detta fall blir:

Tabell 2: Passfel efter 1-parameterinpassning med fri translation i topocentriskt dz (enhet: meter).

Station	Topocentriska komponenter			
	Nord	Ost	Upp	2D
ARJE.0	-81.970	-158.725	-3.776	178.641
KIRU.0	-78.627	-157.191	-5.201	175.759
OVER.0	-76.379	-164.685	-4.316	181.534
SKEL.0	-78.482	-167.509	-3.089	184.983
VILH.0	-83.518	-162.280	-2.286	182.510
BORA.0	-86.311	-181.000	2.814	200.525
JONK.0	-85.247	-182.516	2.569	201.442
SUND.0	-82.091	-172.235	-.757	190.798
HASS.0	-85.175	-187.448	3.681	205.892
NORR.0	-83.236	-182.631	1.602	200.704
ONSA.0	-87.118	-180.688	3.064	200.593
VANE.0	-87.200	-176.616	2.188	196.969
KARL.0	-85.942	-176.145	1.831	195.992
LEKS.0	-84.793	-173.655	.708	193.251
LOVO.0	-81.609	-182.152	.911	199.598
MART.6	-82.365	-177.259	.270	195.460
OSKA.0	-83.240	-187.322	2.648	204.985
OSTE.0	-85.173	-164.340	-1.364	185.100
SVEG.0	-85.134	-169.034	-.282	189.263
UMEA.0	-80.170	-170.019	-1.841	187.972
R.m.s.	**83.240**	**173.903**	**2.619**	**192.799**

Topocentriska parametrar:

Translation x:	0.0000000000 (fixed)
Translation y:	0.0000000000 (fixed)
Translation z:	-30.2854252412
Rotation x:	0.0000000000(fixed)
Rotation y:	0.0000000000(fixed)
Rotation z:	0.0000000000(fixed)
Scale correction:	0.00000000 (fixed)

Enheter: meter, bågsekund och ppm

Geocentriska parametrar:

Translation X:	-379.4375609537
Translation Y:	-109.3308257612
Translation Z:	-603.5274797678
Rotation X:	0.0000000000
Rotation Y:	0.0000000000
Rotation Z:	0.0000000000
Scale correction:	0.00000000

Värdet på den skattade topocentriska parametern dz är som synes -30.285 m, vilket betyder att GRS 80-ellipsoidens yta som resultat av inpassningen ligger drygt 30 meter under Bessel-ellipsoidens i omgivningen av parametrarnas topocentrum (passpunkternas tyngdpunkt). De geocentriska translationerna utgör vektorn mellan de geocentriska systemens origon.

7.3 3-parameterinpassning

Som nästa steg gör vi en 3-parameter-inpassning med fria translationer. Vi får då

Topocentriska parametrar:

Translation x:	83.5665813030
Translation y:	173.1980509464
Translation z:	-30.2854252412
Rotation x:	0.00000000000(fixed)
Rotation y:	0.00000000000(fixed)
Rotation z:	0.00000000000(fixed)
Scale correction:	0.00000000 (fixed)

Geocentriska parametrar:

Translation X:	-497.8058422939
Translation Y:	36.8071586681
Translation Z:	-563.3581152987
Rotation X:	0.0000000000
Rotation Y:	0.0000000000
Rotation Z:	0.0000000000
Scale correction:	0.00000000

Enheter: meter, bågsekund och ppm

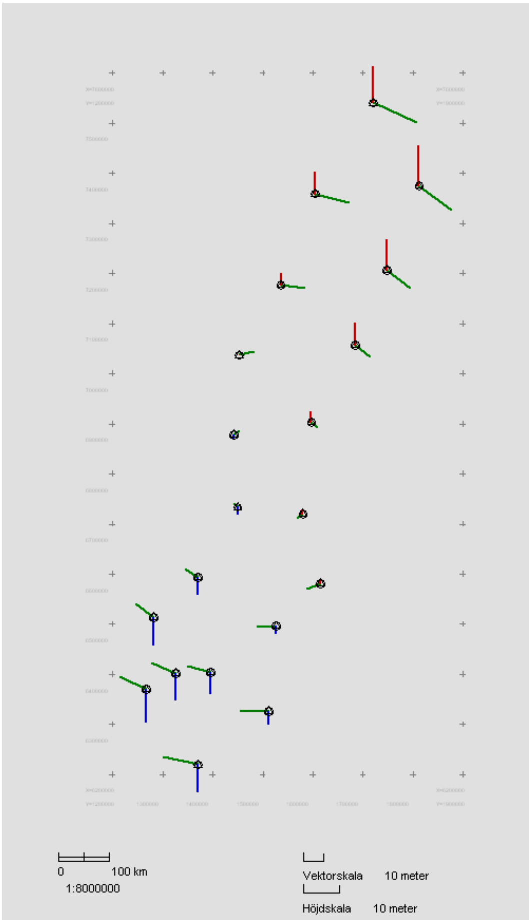
Som synes stämmer, inte helt oväntat, de topocentriska translationerna i x och y väl överens med rms-värdena för Nord och Ost i tabell 2. Translationen i topocentriskt z blir exakt lika stor i 1- och 3-parameterinpassningarna.

Studerar vi passfelen grafiskt, figur 3, ser vi av de gröna vektorerna, som svarar mot de horisontella passfelen, att det kvarstår en tydlig azimutal rotation mellan systemen som inte modellerades av 3-parameterinpassningen. Man kan även gissa sig till att parametrarnas topocentrum, dvs. passpunkternas tyngdpunkt, ligger någonstans sydost om Sveg.

Observera att vektorskalan i de olika figurerna som presenterats i denna studie varierar från figur till fi-

Tabell 3: Passfel efter 3-parameterinpassning med fria translationer (enhet: meter).

Station	Topocentriska komponenter			
	Nord	Ost	Upp	2D
ARJE.0	-4.458	16.989	6.093	17.564
KIRU.0	-9.832	21.725	10.196	23.846
OVER.0	-12.113	15.884	11.361	19.976
SKEL.0	-8.941	11.395	8.672	14.485
VILH.0	-1.441	11.538	3.346	11.628
BORA.0	5.122	-12.133	-7.438	13.170
JONK.0	3.265	-11.997	-5.788	12.433
SUND.0	-2.813	2.929	2.899	4.061
HASS.0	3.901	-17.404	-7.792	17.836
NORR.0	-.214	-9.209	-2.027	9.211
ONSA.0	6.644	-13.241	-9.226	14.814
VANE.0	6.543	-9.005	-7.809	11.131
KARL.0	4.195	-6.400	-4.734	7.652
LEKS.0	1.903	-2.021	-1.847	2.776
LOVO.0	-2.691	-6.787	.823	7.301
MART.6	-1.947	-2.578	1.058	3.231
OSKA.0	.289	-14.219	-3.600	14.222
OSTE.0	1.597	7.269	.175	7.442
SVEG.0	2.066	2.361	-1.124	3.137
UMEA.0	-6.096	7.264	6.209	9.483
R.m.s.	**5.332**	**11.469**	**6.104**	**12.648**



Figur 3: Passfel vid 3-parameterinpassning. Gröna vektorer för horisontella och röda/blå för vertikala passfel.

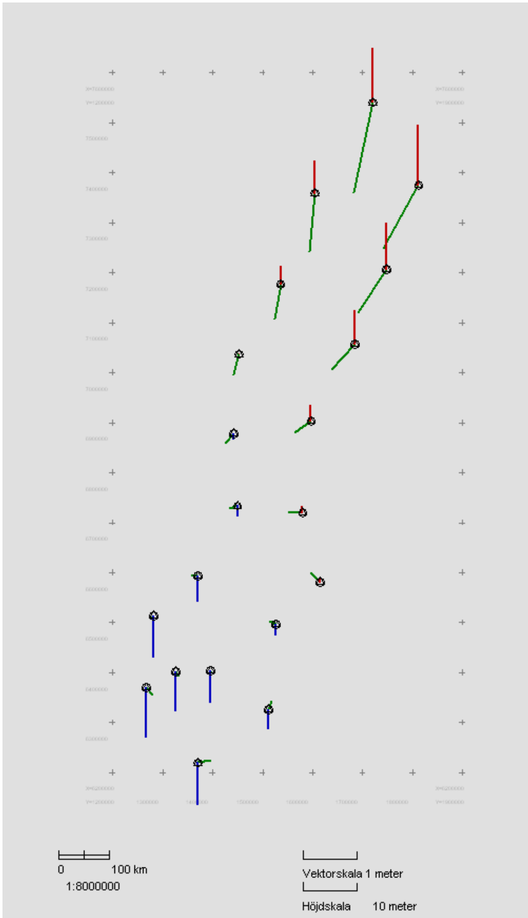
gur, såväl i horisontalled som vertikalled. Man kan därför inte enkelt jämföra restfelens storlek med hjälp av figurerna. Figurerna är enbart till för att se eventuella mönster som kan tyda på systematiska skillnader mellan systemen som inte tagits om hand av transformationsmodellen.

7.4 4-parameterinpassning

För att komma tillrätta med den azimutala rotationen gör vi en ny inpassning där vi utöver de tre translationerna även tillåter en rotation runt den topocentriska z-axeln. Resultatet av denna operation framgår av tabell 4 och figur 4.

Tabell 4: *Passfel efter 4-parameterinpassning med fria translationer och rotation runt den topocentriska z-axeln (enhet meter).*

Station	Topocentriska komponenter			
	Nord	Ost	Upp	2D
ARJE.0	-1.102	-.098	6.093	1.106
KIRU.0	-1.681	-.366	10.197	1.721
OVER.0	-1.174	-.670	11.362	1.352
SKEL.0	-.811	-.547	8.673	.979
VILH.0	-.645	-.106	3.346	.654
BORA.0	-.083	.060	-7.437	.103
JONK.0	-.031	.020	-5.787	.037
SUND.0	-.217	-.311	2.899	.380
HASS.0	.047	.228	-7.791	.232
NORR.0	.068	-.107	-2.027	.127
ONSA.0	-.138	.120	-9.225	.183
VANE.0	-.060	-.054	-7.808	.081
KARL.0	-.006	-.116	-4.734	.116
LEKS.0	-.055	-.142	-1.847	.152
LOVO.0	.180	-.185	.823	.258
MART.6	-.008	-.268	1.058	.268
OSKA.0	.162	.052	-3.599	.171
OSTE.0	-.392	-.098	.174	.404
SVEG.0	-.182	-.157	-1.124	.240
UMEA.0	-.477	-.430	6.210	.642
R.m.s.	.594	.269	6.104	.652



Figur 4: *Passfel vid inpassning med 3 translationer och rotation runt topocentriska z-axeln. Gröna vektorer för horisontella och röda/blå för vertikala passfel.*

Som synes minskar passfelen i topocentriskt Nord och Ost avsevärt medan Upp-komponenten inte påverkas.

Vidare ändras inte de topocentriska translationerna jämfört med 3-parameterinpassningen. De geocentriska translationerna ändras dock något, vilket är helt i sin ordning om man tar i beaktande att rotationsmatrisen $\mathbf{R}_{Topo}$ i ekvation

(6-3) i och med rotationen runt den topocentriska z-axeln inte längre är en identitetsmatris.

Topocentriska parametrar:		**Geocentriska parametrar:**	
Translation x:	83.5665813031	Translation X:	-497.6534618051
Translation y:	173.1980509464	Translation Y:	36.2783418898
Translation z:	-30.2854252412	Translation Z:	-563.3581193341
Rotation x:	0.0000000000(fixed)	Rotation X:	-2.9057790373
Rotation y:	0.0000000000(fixed)	Rotation Y:	-0.8372266913
Rotation z:	6.2909707405	Rotation Z:	-5.5165095465
Scale correction:	0.00000000 (fixed)	Scale correction:	0.00000000

Enheter: meter, bågsekund och ppm

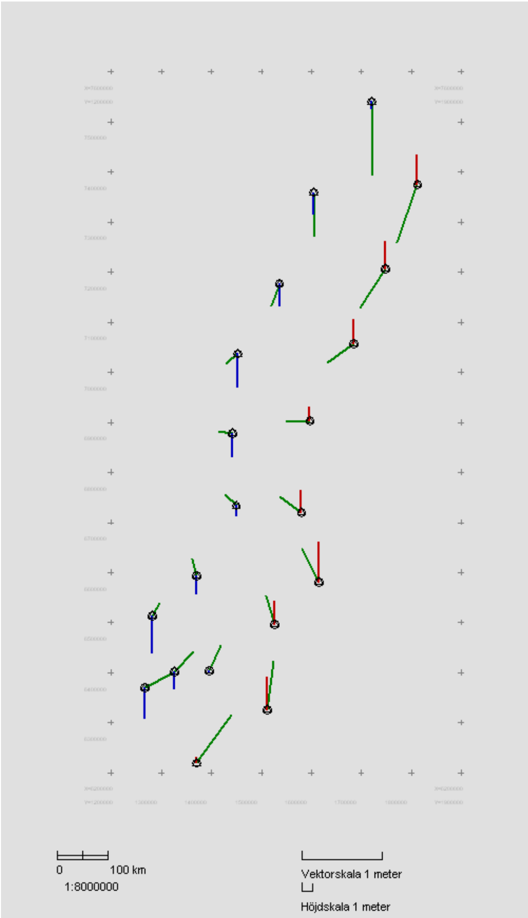
Av figur i 4 ser vi att de kvarstående horisontella passfelen i norra Sverige är signifikant mycket större än de i södra delen av landet. Vidare verkar det som om det finns en nord-sydlig lutning mellan ellipsoidytorna, eftersom Upp-komponenter söder om tyngdpunkten har motsatt tecken mot de i norr.

7.5 5- parameterinpassning

Lutningen som syns i figur i 4 kan justeras genom att tillåta en rotation även runt den topocentriska y-axeln. Nästa steg blir därför att göra en inpassning som även inkluderar rotation runt den topocentriska y-axeln.

Tabell 5: Passfel efter inpassning med tre translationer och rotation runt de topocentriska z- och y-axlarna (enhet meter).

Station	Topocentriska komponenter			
	Nord	Ost	Upp	2D
ARJE.0	-.547	.010	-2.124	.547
KIRU.0	-.915	.015	-.639	.916
OVER.0	-.725	-.254	2.942	.768
SKEL.0	-.492	-.321	2.679	.587
VILH.0	-.278	-.102	-2.224	.296
BORA.0	.246	.234	-1.733	.339
JONK.0	.322	.136	-.092	.349
SUND.0	-.014	-.291	1.320	.292
HASS.0	.594	.429	.569	.733
NORR.0	.364	-.098	2.325	.377
ONSA.0	.193	.362	-3.051	.411
VANE.0	.160	.097	-3.729	.187
KARL.0	.206	-.047	-1.810	.212
LEKS.0	.141	-.134	-.966	.195
LOVO.0	.421	-.217	3.942	.474
MART.6	.191	-.272	2.146	.332
OSKA.0	.608	.080	3.224	.613
OSTE.0	-.132	-.149	-3.365	.199
SVEG.0	.017	-.179	-2.350	.179
UMEA.0	-.234	-.328	2.393	.403
R.m.s.	.413	.221	2.416	.469



Figur 5: Passfel vid inpassning med 3 translationer samt rotation runt de topocentriska z- och y-axlarna. Gröna vektorer för horisontella och röda/blå för vertikala passfel.

Som väntat reduceras passfelet i Upp-komponenterna avsevärt. I norra Sverige från dryga 10 m till 2-3 m. Rms går ned till en tredjedel. Ost-komponenten ändras minst vilket är naturligt eftersom y-rotationen sker runt en axel orienterad i väst-östlig riktning, se figur 2. Nord-komponentens rms-värde går ner från 6 dm till dryga 4 dm.

Vidare ser man av tabellen, kolumn 2D och figur i 5 att de horisontella passfelen i norra Sverige har minskat på bekostnad av de i söder. I figuren finns även en trend som visar att de horisontella felvektorerna pekar norrut och de i norr söderut. Längden av vektorerna växer med avståndet från tyngdpunkten. Detta indikerar att det finns en skalskillnad som inte är modellerad.

En annan trend som nu syns tydligare är att Upp-komponenterna i väster har mottsatt tecken mot de i öster. Någonting som tyder på att det finns en lutning mellan ellipsoidytorna i väst-östlig riktning, dvs. det behövs en rotation runt den topocentriska x-axeln.

Vi skall även ta en titt på parametrarna i detta fall.

Topocentriska parametrar:

Translation x:	83.7598521439	
Translation y:	173.1980450421	
Translation z:	-30.2854266534	
Rotation x:	0.0000000000	(fixed)
Rotation y:	-3.0142533647	
Rotation z:	6.3012847571	
Scale correction:	0.00000000	(fixed)

Enheter: meter, bågsekund och ppm

Geocentriska parametrar:

Translation X:	-419.6034892653
Translation Y:	58.7696070963
Translation Z:	-608.1837657355
Rotation X:	-3.7451134820
Rotation Y:	2.0578150035
Rotation Z:	-5.5255071173
Scale correction:	0.00000000

De topocentriska parametrarna ändrar sig endast obetydligt jämfört med 4-parameterinpassningen. De geocentriska parametrarna ändrar sig däremot påtagligt. Att rotationerna skall ändra sig är ingen överraskning eftersom den nytillagda rotationen runt den topocentriska y-axeln givetvis fördelar sig på alla tre axelrotationerna i de geocentriska parametrarna. De geocentriska translationerna ändrar sig med 20-80 m. Studerar man ekvation (6-3) är det inte helt orimligt om betänker att en rotation av 1 bågsekund flyttar punkterna upp till 30 m.

Vi fortsätter nu med en inpassning med tre translationer och rotationer runt alla tre axlarna.

7.6 6-parameterinpassning

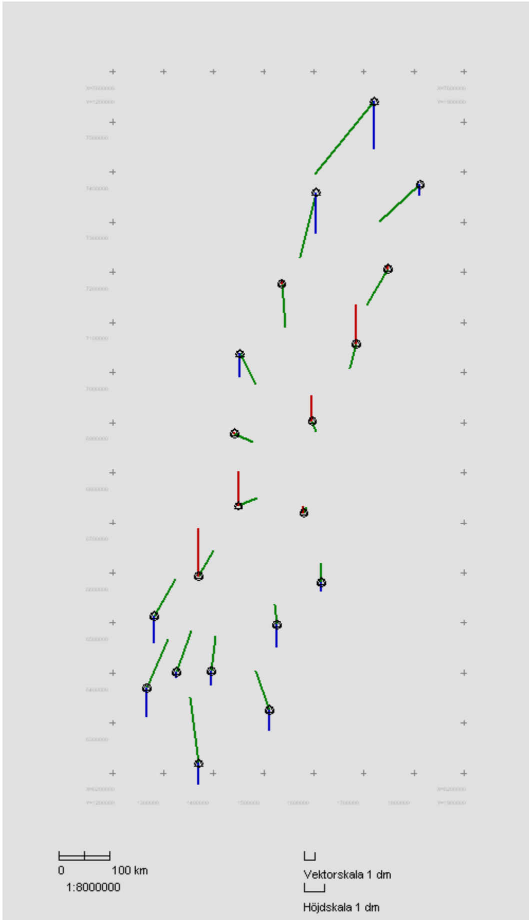
Vi börjar med att titta på passfelen.

Rotationen runt den topocentriska x-axeln ger en nästan tjugofaldig minskning av felet i Upp-komponenten, där rms-värdet går ner från 2.42 m till 0.13 m. Man kan gissa att denna rotation är relaterad till brister i hur geoiden hanterats i RT 90, eftersom vi vet från andra studier att geoiden har en klar öst-västlig lutning.

I de horisontella komponenterna sker endast en marginell förbättring.

Tabell 6: Passfel efter inpassning med tre translationer och rotation runt de topocentriska z-, y- och x-axlarna (enhet meter).

Station	Topocentriska komponenter			
	Nord	Ost	Upp	2D
ARJE.0	-.647	-.162	-.204	.667
KIRU.0	-.724	-.594	-.236	.937
OVER.0	-.367	-.405	-.054	.547
SKEL.0	-.358	-.209	.012	.414
VILH.0	-.436	.040	.023	.438
BORA.0	.406	.142	-.028	.430
JONK.0	.349	.044	-.066	.352
SUND.0	-.110	.036	.124	.116
HASS.0	.658	-.079	-.103	.662
NORR.0	.201	-.020	-.110	.202
ONSA.0	.484	.211	-.143	.528
VANE.0	.364	.216	-.132	.423
KARL.0	.253	.152	.235	.295
LEKS.0	.078	.180	.168	.197
LOVO.0	.190	.000	-.042	.190
MART.6	.052	.031	.030	.060
OSKA.0	.393	-.135	-.102	.415
OSTE.0	-.299	.161	-.116	.340
SVEG.0	-.082	.180	.005	.198
UMEA.0	-.244	-.065	.197	.252
R.m.s.	.384	.206	.129	.436



Figur 6: Passfel vid inpassning med 3 translationer samt rotation runt de topocentriska z-, y- och x-axlarna. Gröna vektorer för horisontella och röda/blå för vertikala passfel.

Topocentriska parametrar:

Translation x:	83.6624623462	
Translation y:	173.5181699139	
Translation z:	-30.2854294630	
Rotation x:	4.9926229146	
Rotation y:	-1.4952101782	
Rotation z:	*6.2479875359*	
Scale correction:	0.00000000	(fixed)

Enheter: meter, bågsekund och ppm

Geocentriska parametrar:

Translation X:	-416.3877417780
Translation Y:	-100.2165160226
Translation Z:	-585.5944844559
Rotation X:	0.9069425078
Rotation Y:	1.8174190607
Rotation Z:	-7.8786778950
Scale correction:	0.00000000

De topocentriska translationerna ändrar sig återigen endast obetydligt jämfört med föregående inpassning. Inte heller rotationen runt den topocentriska z-axeln påverkas så mycket. Möjligheten till rotation runt den topocentriska x-axeln påverkar även rotationen runt y-axeln.

Som synes har de geocentriska parametrarna återigen blivit föremål för en dramatisk ommöblering.

Tittar vi på passfelen grafiskt, figur 6, finns det inte längre någon påtaglig omodellerad lutning mellan ellipsoidytorna. Dock skönjs en viss systematik i de vertikala passfelen. Skaleffekten i de horisontella komponenterna kvarstår givetvis, varför vi fortsätter med nästa steg i vår studie.

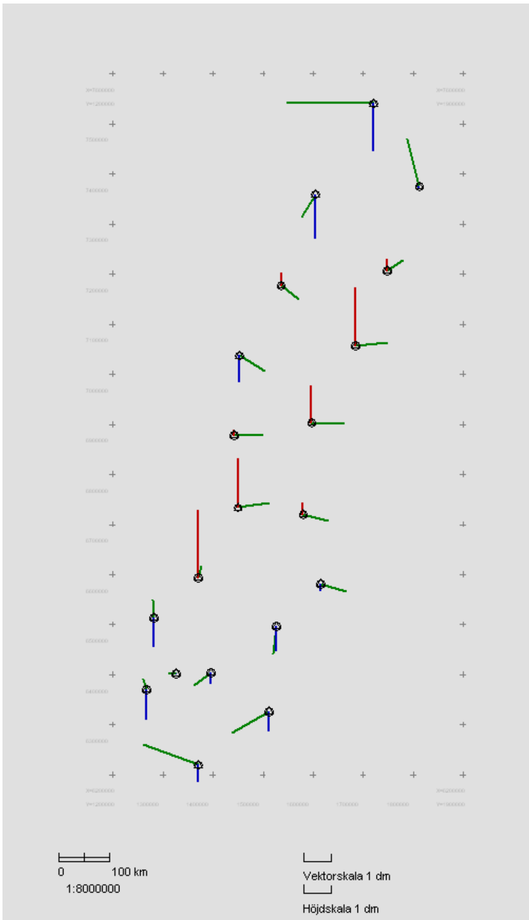
7.7 7-parameterinpassning

I korthet kan nämnas att i detta fall ändras translationerna och rotationerna endast obetydligt jämfört med 6-parameterinpassningen, såväl vad gäller de topocentriska som de geocentriska parametrarna. Värdet på den skattade skalkorrektionen blir 1.01032050 ppm.

Som skall visas i ett senare avsnitt finns det under vissa omständigheter en mycket stark korrelation mellan skalkorrektionen och det topocentriska skiftet dz.

Tabell 7: Passfel efter inpassning med 3 translationer, 3 rotationer samt skalkorrektion (enhet meter).

Station	Topocentriska komponenter			
	Nord	Ost	Upp	2D
ARJE.0	-.083	-.052	-.164	.097
KIRU.0	.006	-.325	-.175	.325
OVER.0	.180	-.044	-.007	.185
SKEL.0	.037	.060	.044	.070
VILH.0	-.051	.066	.048	.084
BORA.0	.003	-.030	.000	.030
JONK.0	-.048	-.065	-.039	.081
SUND.0	-.003	.122	.139	.122
HASS.0	.075	-.207	-.062	.220
NORR.0	-.100	-.010	-.090	.101
ONSA.0	.042	-.013	-.110	.044
VANE.0	.068	-.002	-.108	.068
KARL.0	.045	.013	.253	.047
LEKS.0	.016	.116	.182	.117
LOVO.0	-.028	.095	-.024	.099
MART.6	-.025	.095	.044	.098
OSKA.0	-.079	-.139	-.071	.160
OSTE.0	-.056	.096	-.097	.111
SVEG.0	.001	.106	.020	.106
UMEA.0	.011	.121	.218	.121
R.m.s.	**.064**	**.116**	**.119**	**.132**



Figur 7: Passfel vid inpassning med 3 translationer, 3 rotationer samt skalkorrektion. Gröna vektorer för horisontella och röda/blå för vertikala passfel.

Studerar vi passfelens storlek i tabell 7 ser vi återigen en kraftig minskning av de horisontella komponenterna. Rms för Nord går ner från 0.384 m till 0.064 m och Ost från 0.206 m till 0.116 m. Upp-komponenten påverkas mindre.

Tittar man på den grafiska bilden av de horisontella passfelen, kan man ana två virvlar, en motursriktad för de nordliga punkterna och en medurs för de sydliga.

Alla inpassningar, så här långt, har gjorts med samma viktning av alla ingående komponenter. Studerar man tabell 7, finns det heller inget som direkt indikerar att t.ex. Upp-komponenten skulle vara ett problem, tvärtom är passfelen i denna komponent förvånansvärt små. Det enda störande är att den horisontella överensstämmelsen trots allt inte svarar mot den förväntade nogrannheten i RT 90 om man beaktar det utjämnade triangelnätets styrka, tillsammans med de omgivande nordiska ländernas nät, varav ca 3800 punkter inom Sverige i ett homogent 10 km nät. Om man vidare beaktar att punkterna i nätet är sammanknutna med drygt 15000 längd- och ca 1500 riktningsmätningar och där den förväntade noggrannheten mellan närliggande punkter skattats till 1-2 cm, är det överraskande att inpassningen mot SWEREF-systemen visar på motsättningar på över 30 cm.

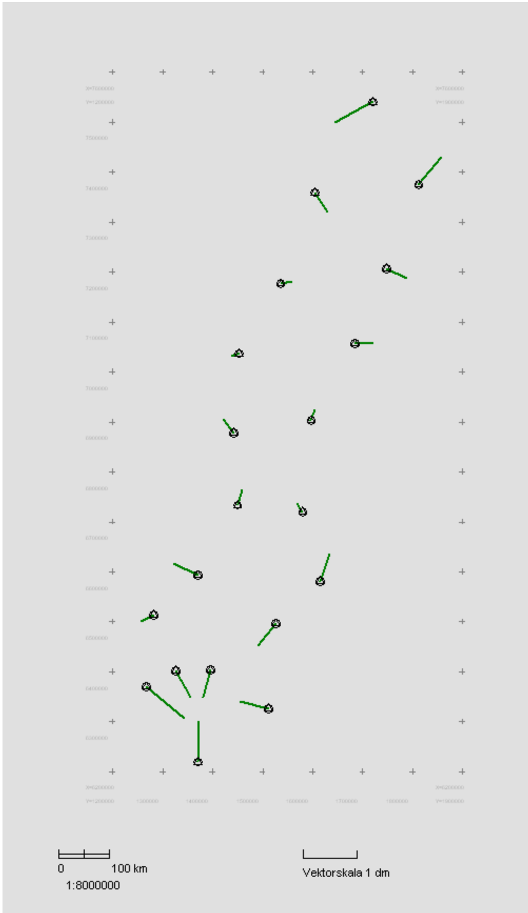
Som antytts i ett tidigare avsnitt fanns vissa problem i den geodetiska definitionen i RT 90. Uppenbarligen klarar inte standardvarianten av 7-parameter-inpassningen att modellera den deformation som bristerna i den geodetiska definitionen eventuellt gett upphov till. En analys av problemet pekar i riktning mot att det framförallt kan vara systematiska fel i den använda geoidmodellen som kan vara orsaken. Som nästa steg skall vi därför göra en inpassning där tvånget i höjd avlägsnas. Detta åstadkommer vi genom att tilldela höjdkomponenterna ett högre à priori-medelfel. I och med att höjdtvånget försvinner inför vi en stark korrelation mellan den topocentriska translationen dz och skalkorrektionen δ. För att undvika ett illa konditionerat ekvationssystem låser vi därför δ till värdet 0. Vi skall titta närmare på sambandet mellan skala och translation i höjdled i ett senare avsnitt.

7.8 Viktad inpassning utan höjdtvång

(Bilaga 1 innehåller den kompletta resultatfilen från inpassningen)

Tabell 8: Passfel efter inpassning med 3 translationer, 3 rotationer, men utan höjdtvång (enhet meter).

Station	Topocentriska komponenter			
	Nord	Ost	Upp	2D
ARJE.0	-.0357	.0232	-7.9041	.0426
KIRU.0	-.0389	-.0723	-7.5773	.0820
OVER.0	.0508	.0431	-5.9735	.0667
SKEL.0	-.0188	.0369	-5.8436	.0414
VILH.0	.0036	.0199	-7.5933	.0202
BORA.0	-.0505	.0267	-6.5201	.0571
JONK.0	-.0517	-.0144	-5.9488	.0537
SUND.0	.0191	.0077	-5.9215	.0206
HASS.0	.0764	.0030	-5.4994	.0765
NORR.0	-.0403	-.0331	-5.2133	.0522
ONSA.0	-.0580	.0719	-7.0300	.0924
VANE.0	-.0114	-.0233	-7.4501	.0259
KARL.0	.0209	-.0453	-6.6183	.0499
LEKS.0	.0286	.0088	-6.5250	.0299
LOVO.0	.0506	.0168	-4.6851	.0533
MART.6	.0155	-.0115	-5.4631	.0193
OSKA.0	.0141	-.0534	-4.6677	.0552
OSTE.0	-.0046	-.0144	-7.9372	.0151
SVEG.0	.0245	-.0193	-7.3052	.0312
UMEA.0	.0026	.0348	-5.6617	.0349
R.m.s.	.0369	.0349	6.4462	.0508



Figur 8: Passfel vid inpassning med 3 translationer, 3 rotationer, men utan höjdtvång. Vektorerna visar de horisontella passfelen.

Topocentriska parametrar:

Translation x:	83.6859793085	
Translation y:	173.4068423468	
Translation z:	-36.6385863800	
Rotation x:	3.1751605455	
Rotation y:	-2.2943202986	
Rotation z:	6.2681584553	
Scale correction:	0.00000000	(fixed)

Enheter: meter, bågsekund och ppm

Geocentriska parametrar:

Translation X:	-414.0978562888
Translation Y:	-41.3381702518
Translation Z:	-603.0627127551
Rotation X:	-0.8550428002
Rotation Y:	2.1413464567
Rotation Z:	-7.0227212665
Scale correction:	0.00000000

Vi ser att det främst är parametrarna för translationen i topocentriskt z samt rotationerna runt de topocentriska x- och y-axlarna som har ändrats. Ändringen i z-translationen är ca 6 m vilket kompenserar för den tidigare konstaterade skalkorrektionen på 1 ppm.

Av tabell 8 ser vi att passfelen nu börjar närma sig en nivå som bättre stämmer överens med den förväntade noggrannheten i RT 90. Givetvis på bekostnad av stora fel i Upp-komponenten, men inte heller detta är ett problem som vi skall se av diskussionen längre fram. En liten skönhetsfläck i sammanhanget är att landets ”mesta” geodetiska station, Onsala, har det största horisontella passfelet.

En svaghet som vidlåder alla gjorda jämförelser av rms-värdena är att dessa inte beaktar att antalet överbestämningar minskar i motsvarande mån som antalet skattade parametrar ökar. Jämför man rms från standardinpassningen med 7 parametrar med den utan höjdtvång används i det förstnämnda fallet 60 ekvationer för att skatta 7 parametrar, medan i det senare fallet 40 ekvationer bestämmer 6 skattade värden. Även med hänsyn tagen till detta innebär inpassningen utan höjdtvång en klar förbättring av den horisontella tillpassningen.

Påtagligt i figur 8 är vektormönstret för de 6 sydligaste stationerna som indikerar att södra delen av landet har en avvikande skala. Något som inte verkar helt tokigt eftersom södra delen av landet huvudsakligen är mätt med mikrovågsinstrumentet Tellurometer medan man från Mälardalen och norrut använt Geodimeter som mäter med synligt ljus. Det är ett känt faktum att det finns en skalskillnad mellan dessa två instrumenttyper. Uppenbarligen har försöket att korrigera för denna skalskillnad, som gjordes i samband med utjämningen som låg till grund för RT 90, inte varit helt framgångsrik. I en liten studie, som inte närmare redovisas här, ger en inpassning utan höjdtvång baserad på de 6 sydliga stationerna en standardavvikelse på 18 mm (2D, 1σ).

7.9 Skalfaktorns inverkan i 3 dimensioner

I detta avsnitt ska vi undersöka hur skalan inverkar på våra koordinater. Vi börjar med att studera vad som sker i det 3-dimensionella rummet.

Vi startar med RR 92-koordinaterna för de 20 SWEPOS-stationerna. Som första steg utför vi en 3D Helmerttransformation med alla parametrar satta till 0 med undantag för skalkorrektionen som sätts till 1 ppm. Därefter subtraherar vi de ursprungliga koordinaterna från de transformerade. Resultat framgår av tabell 9.

Omskalningen i 3D innebär att alla punkter i rummet avlägsnar sig från varandra. Sett från kartesiska systemets origo, som ligger i ellipsoidens centrum, förflyttar sig alla stationer utåt i radiell riktning. Eftersom punkternas avstånd till origo är drygt 6360 km kommer de att hamna drygt 6.36 m över ellipsoidens yta. Till följd av avplattningen avviker den radiella riktningen något från normalens riktning i respektive punkt vilket förklarar differensen på 15-20 mm i latitudled.

Tabell 9: Differens mellan 3D koordinater som skaländrats med 1 ppm minus ursprungliga koordinater (enhet meter).

Station	Topocentriska komponenter		
	Nord	Ost	Upp
ARJE.0	-.016	.000	6.360
KIRU.0	-.015	.000	6.360
OVER.0	-.016	.000	6.360
SKEL.0	-.016	.000	6.360
VILH.0	-.017	.000	6.360
BORA.0	-.019	.000	6.362
JONK.0	-.019	.000	6.362
SUND.0	-.018	.000	6.361
HASS.0	-.020	.000	6.363
NORR.0	-.019	.000	6.362
ONSA.0	-.019	.000	6.362
VANE.0	-.019	.000	6.362
KARL.0	-.019	.000	6.362
LEKS.0	-.018	.000	6.362
LOVO.0	-.019	.000	6.362
MART.6	-.018	.000	6.361
OSKA.0	-.019	.000	6.362
OSTE.0	-.017	.000	6.361
SVEG.0	-.018	.000	6.361
UMEA.0	-.017	.000	6.360

Alltså omskalning i 3D förändrar främst punkternas höjd över ellipsoiden. Latituden ändras något litet och longituden lämnas helt oförändrad.

Slutsatsen blir att skalan i ett system påverkas av vilken höjd över ellipsoiden punkterna tilldelats. En felaktig geoidmodell kan följaktligen orsaka skalfel.

För säkerhets skull skall påpekas att de globalt anpassade systemen av typ SWEREF 99; ITRF osv. i detta sammanhang kan betraktas som felfria. Det är de konventionellt mätta systemen av typen RT 90, ED 87 m.fl. som kan tänkas vara behäftade med skalfel och brister i geoidmodellen.

Gör man en 3D Helmertinpassning mellan ett globalt anpassat system och ett konventionellt definierat system och använder samma vikt på alla observationsekvationer modelleras en eventuell skalskillnad genom en skalkorrektion.

Gör man en 3D Helmertinpassning utan höjdtvång kan man välja att låsa skalkorrektionen till 0. Man kommer då dels att få bästa möjliga anpassning av de horisontella komponenterna, dels att få ellipsoiden inplacerad relativt jordytan så att skalfelet försvinner. Passfelen i höjd kan därefter användas för att justera en felaktig geoidmodell. Observera detta gäller vare sig skalfelet är orsakat av en felaktig geoidmodell eller av brister i längdmätningsinstrument eller längdbaser.

Med andra ord har man gett sitt system en mer korrekt definition utan att koordinaterna behöver ändras. Med den förbättrade definitionen kan t.ex. längder reduceras till ellipsoiden utan att någon skalkorrektion behöver appliceras.

7.10 Skalfaktorns inverkan i 2 dimensioner

Vi utgår från SWEPOS-stationernas geodetiska RR 92-koordinater. Som första steg projiceras de med Gauss-Krügers projektion till 2.5 gon V men i stället för x/y-tilläggen (0/1500000) använder vi (-6500000/0). Detta gör att de projicerade koordinaternas origo hamnar på medelmeridianen någon mil söder om Finspång. Nästa steg är att skala om de plana koordinaterna varefter de återigen omvandlas till latitud, longitud och höjd över Besselellipsoiden. Liksom i 3D fallet tar vi differensen mellan de skaländrade och de ursprungliga geodetiska koordinaterna, se tabell 10.

Tabell 10: Differens mellan koordinater som skaländrats 1 ppm i projektionsplanet och motsvarande ursprungliga koordinater (enhet meter).

Station	Topocentriska komponenter			
	Nord	Ost	Upp	2D
ARJE.0	.856	.136	.000	.866
KIRU.0	1.018	.308	.000	1.064
OVER.0	.834	.407	.000	.928
SKEL.0	.685	.306	.000	.750
VILH.0	.677	.044	.000	.678
BORA.0	-.104	-.170	.000	.199
JONK.0	-.099	-.101	.000	.142
SUND.0	.401	.108	.000	.415
HASS.0	-.284	-.121	.000	.309
NORR.0	-.004	.026	.000	.026
ONSA.0	-.143	-.225	.000	.267
VANE.0	.002	-.219	.000	.219
KARL.0	.089	-.133	.000	.160
LEKS.0	.233	-.054	.000	.240
LOVO.0	.077	.117	.000	.141
MART.6	.219	.085	.000	.235
OSKA.0	-.173	.012	.000	.173
OSTE.0	.536	-.055	.000	.539
SVEG.0	.378	-.064	.000	.383
UMEA.0	.546	.216	.000	.587

Figur 9: Differens mellan plana koordinater med origo strax söder om Finspång som skaländrats 1 ppm och motsvarande ursprungliga koordinater.

Tabellen visar hur mycket punkterna flyttats relativt punkten söder om Finspång. Höjden har givetvis inte påverkats.

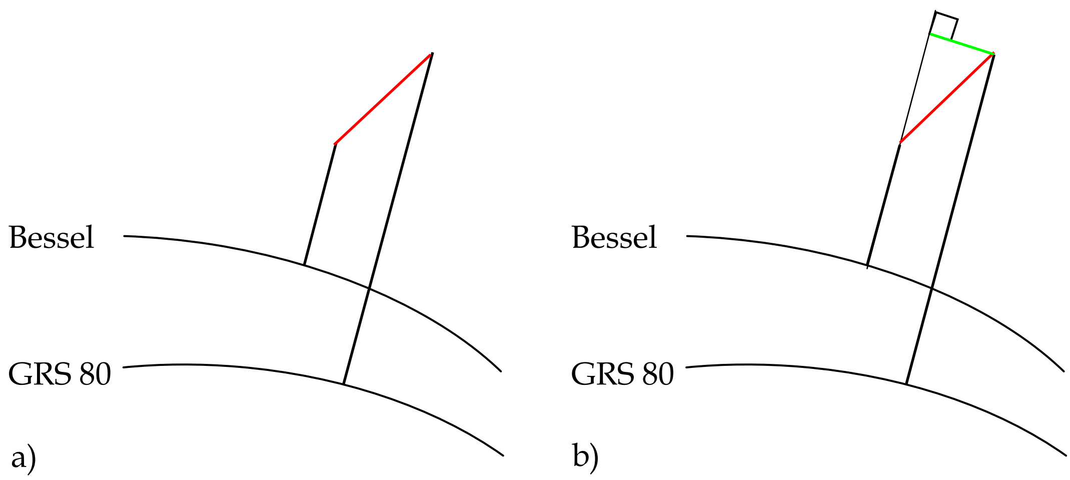
Gör vi en 3D Helmertinpassning mellan de i projektionsplanet omskalade koordinaterna och de ursprunliga koordinaterna, kommer skalskillnaden att modelleras av transformationen så att motsättningen < 1 mm i de horisontella komponenterna (latitud och longitud) när skalskillnaden är 1 ppm. På grund av den annorlunda metriken i projektionsplanet jämfört med det 3-dimensionella rummet kommer emellertid 3D Helmertinpassningen inte att kunna modellera skalskillnaden fullt ut. Motsättningen växer med skalskillnadens storlek och uppgår till 0-5 mm vid en skalskillnad på 10 ppm.

7.11 Hur fungerar inpassningen utan höjdtvång?

Innan vi övergår till att diskutera och sammanfatta resultaten av de olika in-passningsstudier vi genomfört, ska vi för ett ögonblick återvända till våra antennbestyckade ellipsoider.

Varje antennspets har ett läge som svarar mot de geodetiska koordinaterna, (φ, λ, h) för respektive ellipsoid. Att göra en inpassning med lika vikt för alla observationsekvationerna, innebär att ellipsoidernas läge justeras relativt varandra så att kvadratsumman av avstånden mellan antennspetsarna minimeras. I exemplen har inpassningen hela tiden avsett beräkning av parametrar för transformation från SWEREF 99 till RR 92. Studerar vi ekvation (5-10), som representerar de tre observationsekvationerna för den i:te punkten, ser vi att förbättringsvektorn är uttyckt i det topocentriska system på Bessels ellipsoid vars origo har RT 90-koordinaterna (φ_i, λ_i). Vektorn har sin fotpunkt i antennspetsen på Bessels ellipsoid och vektorns andra ändpunkt sammanfaller, efter det att inpassningen utförts, med motsvarande antennspets på GRS 80, se figur 10a.

Vad händer när vi släpper höjdtvånget? Liksom tidigare går förbättringsvektorn från antennspets till antennspets, men nu har vektorernas längd inte längre någon betydelse, utan det som minimeras är summan av kvadraterna av de horisontella komponenterna av förbättringsvektorerna eller uttryckt på annat sätt; för varje antennspets på GRS 80-ellipsoiden mäter vi avståndet till linjen som sammanfaller med antennen på Bessels ellipsoid. Inpassning utan höjdtvång innebär att vi minimerar summan av kvadraterna på alla dessa avstånd, se figur 10b.



***Figur 10**: Förhållandet vid höjdtvång a), respektive utan höjdtvång b).*

7.12 Diskussion av resultaten

Som nämndes i ett av de inledande avsnitten är vi primärt intresserade av att transformera de horisontella koordinaterna. Svagheten med det gängse förfarandet för att beräkna de sju parametrarna är att alla observationsekvationer ges samma vikt. Anpassningen i höjdled sker på bekostnad av den horisontella anpassningen. Omformuleringen av observationsekvationerna enligt ekvation (5-10) löser detta problem.

Metoden att skatta topocentriska parametrar ökar vår insikt i hur 3D Helmert fungerar. T.ex. ser vi att de redan skattade parametrarna ändrar sig måttligt när man successivt tillför fler parametrar i skattningen. De geocentriska parametrarna ändrar sig däremot kraftigt. Intuitivt är det lätt att inse att en liten rotation runt den topocentriska x- eller y-axeln medför att det relativa läget av ellipsoidernas centrum ändras kraftig, vilket är likvärdigt med att de geocentriska translationerna förändras. En bågsekunds rotation ändrar läget drygt 30 m. Det är vanligt att man vid redovisning av parametrarna även anger standardavvikelsen för respektive parameter. Författarens uppfattning är att dessa uppgifter är ointressanta och ofta direkt missvisande. Om man gör upprepade inpassningar inom samma område, men baserade på olika passpunkter, kan parametrarna avvika med belopp som vida överstiger de angivna standardavvikelserna. Vid något tillfälle ledde detta till att man felaktigt ifrågasatte resultaten från en mätkampanj.

Som tidigare påpekats, kan vid transformation av koordinater felaktiga ingångshöjder ge upphov till fel i det horisontella läget, detta på grund av ellipsoidytornas bristande parallellitet. Vi har även konstaterat att transformationen inte bör användas utanför det område som definieras av passpunkterna. Det var då framförallt punkternas horisontella utbredning som var i åtanke, men samma princip gäller givetvis även i höjdled. På höjdsidan uppstår en intressant frågeställning. Passpunkterna är i allmänhet triangelpunkter och ligger därför vanligen på bergstoppar medan de punkter man önskar transformera ligger nere i samhällena. Som extremfall kan man tänka sig en alpby på 1000 meters nivå omgiven av 2000-3000 meter höga alptoppar. En inpassning utan höjdtvång ger i detta fall parametrar som minimerar kvadratsumman av restfelen uppe på nivån för alptopparna, jämför figur 10b. Slutsatsen av detta resonemang blir att man bör göra inpassningen med passpunkternas höjder i det globala systemet (frånsystemet) satta till 1000 meter. Ett mer generellt angreppssätt är att alltid sätta det globala systemets höjder till 0. Detta förfarande kan i princip tillämpas vid all inpassning utan höjdtvång. Man får då parametrar som minimerar passfelen vid GRS 80-ellipsoidens yta. Även vid transformation av övriga punkter skall då det globala systemets höjder sättas till 0. Önskar man göra transformationen i andra riktningen skall man egentligen sätta de lokala höjderna till avståndet mellan ellipsoidytorna i respektive punkt, men eftersom dessa avstånd i allmänhet är små, det rör sig om några tiotal meter, duger det med att även här sätta ingångshöjderna till 0.

Inpassning utan höjdtvång minimerar de horisontella passfelen. Innebär det att man alltid skall tillämpa den metoden? Svaret är nej. Enkelt uttryckt kan man säga att metoden bör användas endast om den ger en påtaglig minskning av de horisontella passfelen. Det som framför allt sker när man släpper höjdtvånget är att man tillåter större rotationer runt de topocentriska x- och y-axlarna. Detta medför en lutning mellan ellipsoidytorna som kompenserar för systematiska höjdfel t.ex. orsakade av brister i geoidmodellen. Förändringen i de horisontella koordinaterna till följd av sådana systematiska fel i höjdmodellen är måttliga. Problemet när man gör en inpassning utan höjdtvång är att minsta kvadratmetoden inte kan skilja på om passfelen orsakas av systematiska fel eller direkta mätfel i triangelnätet. Om mätbruset ligger på en högre nivå än de systematiska felen finns det risk att de topocentriska rotationerna försöker kompensera för fel i enskilda punkters koordinater orsakade av direkta mätfel. Detta är särskilt fallet om antalet passpunkter är litet och/eller inpassningsområdet är litet. För nationella system av typen RT 90 och det finska KKJ som har stort täckningsområde med många passpunkter av god kvalitet är sannolikheten stor att inpassningen modellerar eventuella systematiska fel relaterade till systemens datumdefinition.

Vi lämnar nu 3D Helmerttransformationen och ägnar oss i stället åt följande fråga.

8 Projektionsinpassning

8.1 Bakgrund

Som nämndes i inledningen använder kommunerna i Sverige plana system. Tillkomsten av systemen varierar men ytterst få har en geodetisk definition som gör det möjligt att direkt omvandla de plana x/y-koordinaterna till latitud och longitud, något som orsakar avsevärda problem när man skall skapa ett samband till SWEREF 99.

Ett av syftena med RIX 95-projektet var att ta fram transformationssamband mellan de kommunala systemen och rikssystemen RT 90 och SWEREF 99. En speciell arbetsgrupp bildades vid Lantmäteriets geodetiska utvecklingsenhet som enbart sysslade med frågan om hur dessa samband skulle utformas. Gruppens slutsatser var att sambanden skulle vara så noggranna som möjligt, ha så få transformationssteg som möjligt och använda standardmetoder implementerade i de flesta programvaror för geodetiska- och GIS-tillämpningar, en tulipanaros inte helt lättplockad.

En undersökning av marknaden gav vid handen att de flesta programsystem klarade Transversal Mercatorprojektion i båda riktningarna samt 3D Helmerttransformation. Förvånansvärt var att 2D Helmerttransformation saknades hos merparten.

Ett sätt att skapa ett samband utan att blanda in någon 2D Helmerttransformation var att utnyttja en metod, utvecklats några år tidigare, baserad på Transversal Mercator (TM) projektion och som döpts till projektionsinpassning. Idén till denna ansats emanerade från Ilmar Ussisoo. Vad han gjorde var att projicera (lat, long) i ED 50 till (x,y) på Hayfords ellipsoid med medelmeridianen 15°48'23.0" varefter han passade in med en 2D Helmerttransformation på RT 38 2.5 gon V.

Eftersom TM-projektionen innehåller möjlighet till omskalning och x- och y-tillägg vilket i princip svarar mot skala och translationer i 2D Helmerttransformation, gav det inspiration till att försöka hitta projektionsparametrar, som direkt gav plana koordinater, som så bra som möjligt stämde med RT 90 2.5 gon V, utan att applicera någon 2D Helmerttransformation. Från början gjordes det med ”trial and error”, dvs. genom att gissa lämpligt värde på medelmeridianen, projicera (lat,long) till (x,y) och avsluta med en Helmertinpassning. Sedan användes skala och translationer från Helmertinpassningen som projektionsparametrar i en ny beräkningsrunda med justering av longituden för medelmeridianen. Detta förfarande upprepades tills resultatet troligen var bra. Vid jämförelse med Ilmar Ussisoos metod var detta resultat sämre. Det resulterade i att det halvmanuella räknandet övergavs och istället skrevs ett Fortranprogram som löser ut alla projektionsparametrarna samtidigt enligt minsta kvadratmetoden och med det var projektionsinpassningsmetoden född. Att inte Ussisoos angreppssätt var tillräckligt bra berodde på att 2D Helmerttransformation inte var implementerad i några GPS-utrustningar. Det nya sättet gav en möjlighet att kunna erbjuda en transformation för alla handhållna GPS-mottagare, så att man enkelt kunde få en position som gick att hitta i kartbilden.

Vi skall nu titta litet närmare på denna metod.

8.2 Avbildning $(\varphi,\lambda) \rightarrow (x,y)$ baserad på Transversal Mercatorprojektion enligt Gauss-Krügers formler

Idén är alltså att transformera koordinater mellan två geodetiska datum med hjälp av en projektionsberäkning där projektionens parametrar bestäms genom ett iterativt förfarande analogt med det som används vid 3D Helmertinpassning. Metoden är implementerad för Transversal Mercatorprojektion, men borde vara möjlig att tillämpa även för andra projektioner. Vi börjar med att i detalj beskriva avbildningen från ellipsoidytans (φ, λ) till projektionsplanets (x, y) enligt Gauss-Krügers metod.

Symboler och definitioner:

a	ellipsoidens halva storaxel (semi-major axis)
f	ellipsoidens avplattning (flattening)
e^2	första excentricitetskvadraten (first eccentricity squared)
φ	geodetisk latitud, positiv mot norr
λ	geodetisk longitud, positiv mot öster
x	plan koordinat, positiv mot norr (grid coordinate)
y	plan koordinat, positiv mot öster (grid coordinate)
λ_0	medelmeridianens longitud (longitude of the central meridian)
k_0	skalfaktor på medelmeridianen (scale factor along the central meridian)
x_0	x-tillägg (false northing)
y_0	y-tillägg (false easting)

Alla vinklar (latitud, longitud osv.) skall vara uttryckta i radianer. Observera att x-axeln pekar mot norr och y-axeln mot öster.

Ur ellipsoidparametrarna *a* och *f* beräknas följande storheter:

$$e^2 = f(2-f)$$

$$n = \frac{f}{(2-f)}$$

$$\hat{a} = \frac{a}{(1+n)}\left(1+\frac{1}{4}n^2+\frac{1}{64}n^4+\ldots\right)$$

Beräkna den konforma[1] latituden φ^*

$$\varphi^* = \varphi - \sin\varphi\cos\varphi\left(A + B\sin^2\varphi + C\sin^4\varphi + D\sin^6\varphi + \ldots\right) \tag{8-1}$$

där koefficienterna *A, B, C,* och *D* erhålls ur formlerna:

$$A = e^2$$

$$B = \frac{1}{6}\left(5e^4 - e^6\right)$$

$$C = \frac{1}{120}\left(104e^6 - 45e^8 + \ldots\right)$$

$$D = \frac{1}{1260}\left(1237e^8 + \ldots\right)$$

Definiera ξ´ och η´ som

$$\xi' = \arctan(\tan\varphi^* / \cos(\lambda-\lambda_0)) \tag{8-2}$$

$$\eta' = \operatorname{arctanh}(\cos\varphi^* \sin(\lambda-\lambda_0)) \tag{8-3}$$

Då erhålls

$$\begin{aligned} x = k_0\hat{a}(\xi' &+ \beta_1\sin 2\xi'\cosh 2\eta' + \beta_2\sin 4\xi'\cosh 4\eta' + \\ &+ \beta_3\sin 6\xi'\cosh 6\eta' + \beta_4\sin 8\xi'\cosh 8\eta' + \ldots) + x_0 \end{aligned} \tag{8-4}$$

$$\begin{aligned} y = k_0\hat{a}(\eta' &+ \beta_1\cos 2\xi'\sinh 2\eta' + \beta_2\cos 4\xi'\sinh 4\eta' + \\ &+ \beta_3\cos 6\xi'\sinh 6\eta' + \beta_4\cos 8\xi'\sinh 8\eta' + \ldots) + y_0 \end{aligned} \tag{8-5}$$

där koefficienterna $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ och β_4 beräknas ur

[1] Äldre svensk litteratur benämner denna kvantitet isometrisk latitud. Idag används termen isometrisk latitud för storheten $\psi = \ln\{\tan(\pi/4+\varphi/2)[(1-e\sin\varphi)/(1+e\sin\varphi)]^{e/2}\}$. Den isometriska latituden beräknas ur den konforma latituden enligt formeln $\psi = \ln\tan(\pi/4+\varphi^*/2)$. Jämför. John P. Snyder: Map Projections - A Working Manual, U.S. Geological Survey Professional Paper 1395.

$$\beta_1 = \frac{1}{2}n - \frac{2}{3}n^2 + \frac{5}{16}n^3 + \frac{41}{180}n^4 + \ldots$$

$$\beta_2 = \frac{13}{48}n^2 - \frac{3}{5}n^3 + \frac{557}{1440}n^4 + \ldots$$

$$\beta_3 = \frac{61}{240}n^3 - \frac{103}{140}n^4 + \ldots$$

$$\beta_4 = \frac{49561}{161280}n^4 + \ldots$$

8.3 Projektionsinpassning baserad på Transversal Mercatorprojektion med Gauss-Krügers formler

Givet: *Ett antal punkter med kända geodetiska koordinater (φ, λ). För samma punkter känner vi även koordinaterna (x, y) i ett plant system.*

Sökt: *En Transversal Mercatorprojektion (eller kortare TM-projektion) som omvandlar de givna (φ, λ)-värdena till plana koordinater (x, y) som överensstämmer med de givna (x, y)-värdena.*

För att utföra en TM-projektion behöver man specificera dels den använda ellipsoidens storaxel (a) och avplattning (f), dels longituden för medelmeridianen (λ_0), skalan på medelmeridianen (k_0) samt x- och y-tilläggen (x_0) och (y_0). Ellipsoidparametrarna a och f förutsätter vi vara kända.

Observera att ellipsoidparametrarna alltid hämtas från systemet med de givna (φ, λ)-värdena.

Vi betraktar x och y som funktioner av projektionsparametrarna enligt följande x=x(λ_0, k_0, x_0, y_0) och y=y(λ_0, k_0, x_0, y_0). I vanlig ordning gör vi en Taylorutveckling runt närmevärdena (λ_0), (k_0), (x_0), (y_0). Observationsekvationerna blir då

$$x + v_x = \mathrm{x}((\lambda_0),(k_0),(x_0),(y_0)) + (\frac{\partial x}{\partial \lambda_0})_0 \Delta\lambda_0 + (\frac{\partial x}{\partial k_0})_0 \Delta k_0 + (\frac{\partial x}{\partial x_0})_0 \Delta x_0 + (\frac{\partial x}{\partial y_0})_0 \Delta y_0 \tag{8-6}$$

$$y + v_y = \mathrm{y}((\lambda_0),(k_0),(x_0),(y_0)) + (\frac{\partial y}{\partial \lambda_0})_0 \Delta\lambda_0 + (\frac{\partial y}{\partial k_0})_0 \Delta k_0 + (\frac{\partial y}{\partial x_0})_0 \Delta x_0 + (\frac{\partial y}{\partial y_0})_0 \Delta y_0 \tag{8-7}$$

där $\Delta\lambda_0$, Δk_0, Δx_0 och Δy_0 är obekanta korrektioner till närmevärdena samt v_x och v_y är förbättringar till de observerade (kända) värdena x och y.

Vi skall nu härleda uttryck för de partiella derivatorna. Vi använder Gauss-Krügers formler enligt ekvationerna (8-4) och (8-5) ovan och får då

$$x = k_0 \ \hat{a}\ \mathrm{f}(\xi'(\lambda_0),\eta'(\lambda_0)) + x_0 \tag{8-8}$$

$$y = k_0 \ \hat{a}\ \mathrm{g}(\xi'(\lambda_0),\eta'(\lambda_0)) + y_0 \tag{8-9}$$

De partiella derivatorna blir

$$\frac{\partial x}{\partial k_0} = \hat{a}\ f \qquad \frac{\partial x}{\partial x_0} = 1 \qquad \frac{\partial x}{\partial y_0} = 0 \tag{8-10}$$

$$\frac{\partial y}{\partial k_0} = \hat{a}\ g \qquad \frac{\partial y}{\partial x_0} = 0 \qquad \frac{\partial y}{\partial y_0} = 1 \tag{8-11}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda_0} = k_0 \hat{a} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \xi'} \frac{\partial \xi'}{\partial \lambda_0} + \frac{\partial f}{\partial \eta'} \frac{\partial \eta'}{\partial \lambda_0} \right\} \tag{8-12}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda_0} = k_0 \hat{a} \left\{ \frac{\partial g}{\partial \xi'} \frac{\partial \xi'}{\partial \lambda_0} + \frac{\partial g}{\partial \eta'} \frac{\partial \eta'}{\partial \lambda_0} \right\} \tag{8-13}$$

Enligt ekvationerna (8-4), (8-5), (8-8) och (8-9) får vi

$$f(\xi', \eta') = \xi' + \sum_{i=1}^{4} \beta_i \sin 2i\ \xi' \cosh 2i\ \eta' + \ldots \tag{8-14}$$

$$g(\xi', \eta') = \eta' + \sum_{i=1}^{4} \beta_i \cos 2i\ \xi' \sinh 2i\ \eta' + \ldots \tag{8-15}$$

Fyra termer i serieutvecklingen är mer än tillräckligt för millimeterskärpa.

Ur ekvationerna (8-14) och (8-15) får vi

$$\frac{\partial f}{\partial \xi'} = 1 + \sum_{i=1}^{4} 2i\beta_i \cos 2i\xi' \cosh 2i\eta' + \ldots \tag{8-16}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta'} = \sum_{i=1}^{4} 2i\beta_i \sin 2i\xi' \sinh 2i\eta' + \ldots \tag{8-17}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \xi'} = -\sum_{i=1}^{4} 2i\beta_i \sin 2i\xi' \sinh 2i\eta' + \ldots \tag{8-18}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \eta'} = 1 + \sum_{i=1}^{4} 2i\beta_i \cos 2i\xi' \cosh 2i\eta' + \ldots \tag{8-19}$$

Anmärkning: Jämför vi ekvationerna (8-16) och (8-17) med (8-18) och (8-19) ser vi att (8-16) och (8-19) är identiska. Samma sak gäller (8-17) och (8-18) förutom tecknet dvs.

$$\frac{\partial f}{\partial \xi'} = \frac{\partial g}{\partial \eta'} \quad \text{och} \quad \frac{\partial f}{\partial \eta'} = -\frac{\partial g}{\partial \xi'}$$

Detta är ett generellt samband som gäller för alla konforma avbildningar och brukar benämnas Cauchy-Riemanns differentialekvationer.

Slutligen får vi ur ekvationerna (8-2) och (8-3) efter visst formeltrixande de numeriskt välartade formlerna

$$\frac{\partial\xi'}{\partial\lambda_0} = -\frac{\sin\varphi^*\cos\varphi^*\sin(\lambda\text{-}\lambda_0)}{\sin^2\varphi^* + \cos^2\varphi^*\cos^2(\lambda\text{-}\lambda_0)} \qquad (8\text{-}20)$$

$$\frac{\partial\eta'}{\partial\lambda_0} = -\frac{\cos\varphi^*\cos(\lambda\text{-}\lambda_0)}{\sin^2\varphi^* + \cos^2\varphi^*\cos^2(\lambda\text{-}\lambda_0)} \qquad (8\text{-}21)$$

Med ett undantag har vi nu alla uppgifter som behövs för att ställa upp observationsekvationerna. Det som saknas är närmevärden för de obekanta inför första iterationsvarvet. Eftersom tilläggen x_0 och y_0 ingår linjärt i ekvationerna (8-8) och (8-9) kan närmevärdena för dessa sättas till 0, men tester visar att 0 även duger för λ_0. Vill man bättra på konvergensen kan λ_0 sättas till medelvärdet av den minsta och största longituden för någon av passpunkterna. För k_0 väljer man lämpligen värdet 1.

Korrektionerna till parametrarna löses ut ur det överbestämda linjära ekvationssystemet med minsta kvadratmetoden, varefter de påförs närmevärdena inför nästa iterationsvarv. Förfarandet konvergerar vanligtvis snabbt.

8.4 Diskussion av metodens användbarhet

Det är huvudsakligen två faktorer som begränsar användbarheten.

De plana koordinaterna måste ha sitt ursprung i en TM-projektion. Olika projektioner deformerar avbildningen i projektionsplanet på olika sätt. I TM-projektionen växer deformationerna med avståndet från medelmeridianen, medan de i t.ex. Lamberts projektion växer med avståndet från standardparallellerna. För mycket små områden (maximalt några km) kan ett plant system med Lambertgeometri approximeras med en TM-projektion, men felen växer som sagt mycket snabbt med områdets storlek.

Det lokala systemets x-axel måste vara parallell med medelmeridianens bild. Det sistnämnda betyder t.ex. att om det lokala systemet anses ha sitt ursprung i 5 gon V, skall den lokala x-axeln vara parallell med x-axeln i 5 gon V. Gjorda studier visar att dålig orientering av det lokala systemet omöjliggör en god anpassning mellan projicerade och lokala koordinater. Passfelen är proportionella mot vridningen och växer linjärt med arean hos det lokala systemets täckningsområde. Se tabell 11.

Tabell 11: Fel i meter orsakade av att det lokala systemet är roterat.

	1 mgon	2 mgon	10 mgon	100 mgon	1000 mgon	10000 mgon
1*1 km²	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,004
10*10 km²	0,000	0,000	0,000	0,003	0,031	0,305
50*50 km²	0,001	0,002	0,008	0,077	0,770	7,700
100*100 km²	0,003	0,006	0,031	0,308	3,080	30,080

Utöver fel som beror på att det lokala systemet inte har TM-geometri eller av att det är roterat, finns avvikelser orsakade av skillnader i datumdefinitionen (ellipsoidernas krökning m.m.). Dessa effekter växer med områdets storlek. Hittills gjorda studier tyder på att för Sverige som helhet torde effekten inte överstiga 1-2 dm. För mindre områden, (50*50 km), blir felet troligen mindre än 1 mm.

Sammanfattningsvis kan sägas att det som främst orsakar problem när det gäller de kommunala systemen är brister i orienteringen. Smärtgränsen går någonstans vid 1-5 mgon. Tyvärr visar det sig att en del kommunala/lokala system är roterade med ett belopp som i vissa fall uppgår till flera gon. För dessa system blir det nödvändigt att även beakta rotationen. Vi får då kombinera projektionsinpassningen med antingen en plan eller en 3-dimensionell Helmerttransformation, (2D/3D Helmert). Använder vi en 2D Helmerttransformation, kan skattningen av Helmertparametrarna göras i samma minstakvadratinpassning som projektionsparametrarna. I nästa avsnitt går vi igenom hur man ställer upp observationsekvationerna i detta fall.

9 Projektionsinpassning kombinerad med en plan Helmerttransformation

Eftersom både TM-projektionen och 2D Helmerttransformation inkluderar en skalfaktor och skift i x- och y-koordinaterna, uppstår en viss förbistring när det gäller att namnge de ingående variablerna. För TM-projektionen behåller vi alla variabelnamn från föregående avsnitt, med undantag av vi döper om koordinaterna som erhålls i vänsterledet av ekvationerna (8-14) och (8-15) till x'och y'. Det är dessa koordinater som skall transformeras vidare med den plana Helmerttransformationen. 2D Helmerttransformation är liksom 3D Helmerttransformation en likformighetstransformation, men till följd av att den arbetar i två dimensioner får vi bara fyra parametrar; en skalfaktor (s_H), en rotation (α), samt två translationer (x_{0H} och y_{0H}). Vi använder följande formel för att beskriva den plana Helmerttransformationen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{0H} \\ y_{0H} \end{pmatrix} + s_H \mathbf{R} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{9-1}$$

där **R** är en rotationsmatris definierad enligt följande

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{9-2}$$

De slutliga koordinaterna x och y är nu funktioner av åtta parametrar, x=x(λ_0, k_0, x_0, y_0, s_H, α, x_{0H}, y_{0H}) och y=y(λ_0, k_0, x_0, y_0, s_H, α, x_{0H}, y_{0H}).

Observationsekvationerna ställs upp analogt med ekvationerna (8-6) och (8-7), men med den skillnaden att det tillkommer termer för Δs_H, $\Delta\alpha$, Δx_{0H} och Δy_{0H}. Även de partiella derivatorna modifieras något

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{x}}{\partial k_0} \\ \dfrac{\partial \mathrm{y}}{\partial k_0} \end{pmatrix} = s_H \mathbf{R} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{x}'}{\partial k_0} \\ \dfrac{\partial \mathrm{y}'}{\partial k_0} \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{x}}{\partial \lambda_0} \\ \dfrac{\partial \mathrm{y}}{\partial \lambda_0} \end{pmatrix} = s_H \mathbf{R} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{x}'}{\partial \lambda_0} \\ \dfrac{\partial \mathrm{y}'}{\partial \lambda_0} \end{pmatrix} \text{ samt } \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{x}}{\partial x_0} \\ \dfrac{\partial \mathrm{y}}{\partial x_0} \end{pmatrix} = s_H \mathbf{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{x}}{\partial y_0} \\ \dfrac{\partial \mathrm{y}}{\partial y_0} \end{pmatrix} = s_H \mathbf{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De partiella derivatorna x' och y' ovan med avseende på k_0 och λ_0 fås ur ekvationerna (8-10), (8-11) och (8-12), (8-13).

För de nya parametrarna får vi

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{x}}{\partial s_H} \\ \dfrac{\partial \mathrm{y}}{\partial s_H} \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{x}}{\partial \alpha} \\ \dfrac{\partial \mathrm{y}}{\partial \alpha} \end{pmatrix} = s_H \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ samt } \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{x}}{\partial x_{0H}} \\ \dfrac{\partial \mathrm{y}}{\partial x_{0H}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{x}}{\partial y_{0H}} \\ \dfrac{\partial \mathrm{y}}{\partial y_{0H}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Parametrarna beräknas liksom tidigare genom att med minsta kvadratmetoden lösa ut korrektioner till närmevärden för de sökta parametrarna. Förfarandet itereras genom att addera de skattade korrektionerna från föregående iterationssteg till närmevärdena. Som startvärden för iterationen kan man sätta skalan $s_H = 1$. För de övriga tre, (α, x_{0H} och y_{0H}) är 0 ett lämpligt startvärde.

Eftersom både TM-projektion och 2D Helmerttransformation innehåller en obekant skalfaktor samt translationer i x och y uppstår en komplikation. Försöker man skatta alla parametrar i en och samma inpassning blir det linjära ekvationssystemet singulärt. Man måste alltså låsa en av skalfaktorerna samt en av translationerna i x respektive y till på förhand bestämda värden. T.ex. kan man sätta TM-skalan till 1 och x- och y-tilläggen till 0 respektive 1500000.

Som tidigare nämnts saknade, i RIX 95-projektets initialskede, många av de programvaror som fanns på marknaden möjlighet att utföra en 2D Helmerttransformation, men de flesta hade en 3D Helmert implementerad. Nästa avsnitt avhandlar frågan hur man kombinerar TM-projektionen med en 3D Helmerttransformation.

10 Projektionsinpassning kombinerad med en 3D Helmerttransformation

Transformationskedjan för omvandling från (φ, λ) till (x, y) blir, när parametrarna väl är bestämda, i detta fall att man först gör en 3D Helmert följt av en TM-projektion.

Grundproblemet, när vi skall bestämma parametrarna i transformationssambandet, ligger i att vi inte har något på förhand givet sätt att omvandla de plana koordinaterna (x, y) till geodetiska (φ, λ). Hade vi det vore det trivialt att beräkna parametrarna för 3D Helmerttransformationen. Tyvärr har inte observationsekvationer formulerats som gör det möjligt att skatta parameteruppsättningarna för 3D Helmerttransformationen och TM-projektionen i samma inpassning. I stället har ett förfarande valts, grundat på följande resonemang.

Helmerttransformationens uppgift, vare sig den sker i två eller tre dimensioner, är att ta hand om rotationen mellan systemen eftersom denna inte kan modelleras av TM-projektionen. Det är därför rimligt att anta att samma TM-projektion kan användas både vid 2D som 3D Helmerttransformation.

Ansatsen blir därför att som första steg göra en kombinerad TM- och 2D Helmertinpassning. I nästa steg används de erhållna projektionsparametrarna till att transformera passpunkternas plana koordinater till fiktiva latitud- och longitudvärden. Som sista steg görs en 3D Helmertinpassning mellan det globala systemet, SWEREF 99 i vårt fall, och det fiktiva systemet. Förfarandet har den fördelen att samma projektionsparametrar används vare sig projektionen kombineras med en 2D eller 3D Helmerttransformation.

Eftersom de kommunala systemen täcker relativt små områden, blir inte den horisontella anpassningen märkbart bättre om inpassningen görs utan höjdtvång, däremot riskerar man att få orealistiskt stora rotationer runt de topocentriska x- och y-axlarna i detta fall. Snarare vill man att dessa rotationer skall var så små som möjligt, för att få transformationen att stämma med 2D Helmertvarianten. I RIX 95-arbetet görs därför 3D-inpassningen med höjdtvång, men med höjderna satta till noll i båda systemen.

Normalt brukar noggrannheten i ett inpassningsproblem försämras om man delar upp beräkningen i två fristående inpassningar. På grund av problemets natur ger den valda ansatsen passfel på samma nivå, vare sig man kombinerar TM-projektionen med en 2D eller 3D Helmerttransformation. Skillnaden i de enskilda x/y-koordinaterna blir dock märkbar, men håller sig i allmänhet under 5-10 mm. Vid små rotationer brukar det endast slå 1-2 mm i någon enstaka punkt.

11 Implementering i RIX 95

Avslutningsvis ges en kort redogörelse för hur de i de tidigare avsnitten beskrivna transformationsmetoderna implementerats i den beräkningsrutin som används för att ta fram sambanden i RIX 95.

Som nämndes 8.1 var en målsättning med arbetet att ta fram transformationssambanden, att de skulle vara så noggranna som möjligt, ha så få transformationssteg som möjligt och grundas på standardmetoder som finns i implementerade i de flesta programvaror för såväl geodetiska tillämpningar som GIS-tillämpningar. Tveklöst uppfyller samband framtagna genom projektionsinpassning denna målsättning. Viss handpåläggning krävs dock, framförallt när projektionsinpassningen måste kombineras med en 2D eller 3D Helmerttransformation. Vid tidpunkten när programkoden skrevs för de transformationsmetoder som beskrivits i tidigare avsnitt, fanns det kommersiella program för TM-projektion för vilka man bara kunde ange ett relativt litet antal siffror för medelmeridianens longitud (λ_0). Om programmen redovisade λ_0 med fler siffror än användarens program kunde ta emot måste denne göra en avrundning vilket kunde ge upphov till systematiska fel i de transformerade koordinaterna. T.ex. ger avrundning till 4 decimaler i sekunddelen ett fel på ca 1.5 mm i y-koordinaten. Ger man λ_0 i grader svarar det mot 8 decimaler. För att så långt som möjligt minska felen från avrundningen byggdes avrundning av λ_0 och k_0 in i dessa program. Beräkningen genomförs stegvis. I steg ett görs en vanlig kombinerad inpassning med TM-projektion och 2D Helmerttransformation. I steg två avrundas de från steg ett skattade parametrarna för λ_0 och k_0 till lämpligt antal decimaler, varefter de låses till det avrundade värdena och inpassningen görs om. Poängen med att göra om inpassningen med låsta värden är att de övriga skattade parametrarna kompenserar för avrundningen. Det är viktigt att avrundningen av λ_0 görs i grader eftersom decimaldelen av graderna alltid kan omvandlas till ett ändligt decimalbråk i minuter eller minuter och sekunder, medan det omvända inte gäller. Ovanstående beskrivning av hur avrundningen är implementerad är något förenklad, men en detaljerad beskrivning skulle knappast vara läsbar.

För att underlätta arbetet i RIX 95 har programmen anpassats till produktionsmiljön i övrigt. T.ex. fås utöver en textfil med redovisningen av inpassningen, tf/tfi-filer och en GPLOT-fil som kan användas i GTRANS. I tf/tfi-filerna finns även geodetiska koordinater med samt deras transformerade motsvarigheter för de 4 extrempunkter som inringar inpassningsområdet. Bilaga 2 innehåller exempel på en textfil och en transformationsfil.

Som avslutning kan nämnas att i Stockholm, Göteborg och Malmö har samma plana system även tillämpats i kranskommunerna, med resultat att lokala dialekter uppstått. Ofta är den lokala dialekten av god kvalitet inom respektive kommun, men motsättningar uppstår när man arbetar över kommungränserna. Detta innebär att en gemensam uppsättning parametrar för t.ex. hela Stor-Stockholm ger alltför dålig anpassning i samtliga kommuner. En kompromiss är att skatta ett samband för varje kommun, och samtidigt tillföra artificiella punkter i kommungränserna som med lämplig viktning förhindrar att motsättningarna i kommungränserna inte blir för stora. Metoden med multipel inpassning, som påminner om fotogrammetrisk blocktriangulering, har implementerats både för 2D Helmert och TM-projektion.

En annan facilitet som kan nämnas är att alla inpassningsprogrammen klarar att hantera problemet med att punkter kan ha olika identiteter i olika koordinatfiler. Lösningen är en s.k. nyckelfil där man anger vilka identiteter som gäller för respektive punkt. Multiinpassningsprogrammen klarar upp till tre identiteter per punkt. I dessa program behöver man inte samla alla geodetiska respektive plana koordinater i samma fil, utan man använder en metafil med bl.a. namnen på de filer som innehåller koordinaterna.

Referenser

Bjerhammar A (1967), *Geodesi.* Almqvist & Wiksell. Stockholm 1967.

Bowring B R (1976), *Transformation from spatial to geodetic coordinates.* Survey Review 181:323-327.

Hedling G & Reit B-G (1989), *Transformation WGS 84 till RT 90 (RT38).* Kartavdelningen Informerar: Lantmäteriverktet, Gävle

Krüger L (1912), *Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene.* eröffentlichung des Könlichen Preuszischen Geodätischen Institutes, 52

Reit B-G (1998), *The 7-Parameter Transformation To A Horizontal Geodetic Datum.* Survey Review Vol. 34 No. 268 (April 1998)

Reit B-G (1999), *Improving A Horizontal Datum Without Changing The Coordinates.* Survey Review Vol. 35 No. 272 (April 1999)

Ussisoo I (1977) *Kartprojektioner* Lantmäteriverkets tekniska skrifter, 1977/6

Bilagor

Bilaga 1: 3D Helmertinpassning utan höjdtvång

```
/*Program WOPTFIT Computation made Ferbuary 11, 2009.
From system: SWEREF 99 lat long ellh
To   system: RR 92
From input file: Sw99_LatLongh.k
To   input file: RR92.k
Number of points found in "From"-file:   20
Number of points found in "To  "-file:   21
Number of common points used in the fitting:   20
The matching of points is based on common identities of the two
input files.
Number of least squares iteration steps:    6
Units: length - meter, arc - arcsec, scale - ppm (mm per km)
Ellipsoid of FROM-system:  a=6378137.000 1:f=298.257222101 (GRS 80)
Ellipsoid of   TO-system:  a=6377397.155 1:f=299.152812800 (Bessel
1841)
The "topocentres" are oriented by the following geodetic coordinates
FROM-system:    61  16  11.003050    16   4  25.549145         .0000
  TO-system:    61  16  11.003050    16   4  25.549145         .0000
Geocentric coordinates of the origins of the "topocentres"
FROM-system:   2953641.3560    851059.7834   5569851.9261
  TO-system:   2953275.9071    850954.4833   5569274.9557
Transformation parameters between topocentric systems (RZ*RY*RX)
(Note, the topocentric systems are left-handed.)
Translation  of topocentric x:       83.6859793085 m
Translation  of topocentric y:      173.4068423468 m
Translation  of topocentric z:      -36.6385863800 m
Rotation around topocentric x:        3.1751605455 arcsec
Rotation around topocentric y:       -2.2943202986 arcsec
Rotation around topocentric z:        6.2681584553 arcsec
             Scale correction:           .00000000 ppm (mm per km)  (fixed)
                       (Scale:    1.00000000000000) (fixed)
Transformation parameters between geocentric systems (RZ*RY*RX)
Translation  of  geocentric X:     -414.0978562888 m
Translation  of  geocentric Y:      -41.3381702518 m
Translation  of  geocentric Z:     -603.0627127551 m
Rotation around  geocentric X:        -.8550428002 arcsec
Rotation around  geocentric Y:        2.1413464567 arcsec
Rotation around  geocentric Z:       -7.0227212665 arcsec
             Scale correction:           .00000000 ppm (mm per km)
                       (Scale:    1.00000000000000)
```

```
Sign of residuals: transformed minus original
              Residuals                          A priori st.dev.
Station    North   East      Up       2D   North   East       Up
ARJE.0    -.0357   .0232  -7.9041  .0426  .0500  .0500   999.0000
KIRU.0    -.0389  -.0723  -7.5773  .0820  .0500  .0500   999.0000
OVER.0     .0508   .0431  -5.9735  .0667  .0500  .0500   999.0000
SKEL.0    -.0188   .0369  -5.8436  .0414  .0500  .0500   999.0000
VILH.0     .0036   .0199  -7.5933  .0202  .0500  .0500   999.0000
BORA.0    -.0505   .0267  -6.5201  .0571  .0500  .0500   999.0000
JONK.0    -.0517  -.0144  -5.9488  .0537  .0500  .0500   999.0000
SUND.0     .0191   .0077  -5.9215  .0206  .0500  .0500   999.0000
HASS.0     .0764   .0030  -5.4994  .0765  .0500  .0500   999.0000
NORR.0    -.0403  -.0331  -5.2133  .0522  .0500  .0500   999.0000
ONSA.0    -.0580   .0719  -7.0300  .0924  .0500  .0500   999.0000
VANE.0    -.0114  -.0233  -7.4501  .0259  .0500  .0500   999.0000
KARL.0     .0209  -.0453  -6.6183  .0499  .0500  .0500   999.0000
LEKS.0     .0286   .0088  -6.5250  .0299  .0500  .0500   999.0000
LOVO.0     .0506   .0168  -4.6851  .0533  .0500  .0500   999.0000
MART.6     .0155  -.0115  -5.4631  .0193  .0500  .0500   999.0000
OSKA.0     .0141  -.0534  -4.6677  .0552  .0500  .0500   999.0000
OSTE.0    -.0046  -.0144  -7.9372  .0151  .0500  .0500   999.0000
SVEG.0     .0245  -.0193  -7.3052  .0312  .0500  .0500   999.0000
UMEA.0     .0026   .0348  -5.6617  .0349  .0500  .0500   999.0000
R.m.s.     .0369   .0349   6.4462  .0508

Residual having largest absolute value:
Topocentric  x-component    .0764 at point HASS.0
Topocentric  y-component   -.0723 at point KIRU.0
Topocentric  z-component  -7.9372 at point OSTE.0
Topocentric 2D-component    .0924 at point ONSA.0
```

Bilaga 2: Projektionsinpassning kombinerad med 2D Helmertinpassning

Exempel på textfil som redovisar resultatet av en inpassning

```
PROJFIT compiled May 04, 2004
The parameters are based on a least squares fit using a combined
Transverse Mercator projection and 2D similarity transformation.
The result is based on coordinates from the files
Sweref99_latlong_h=0.k and Rotstad.k
Geodetic coordinates: SWEREF 99 lat long
Grid     coordinates: Rotstad lokala
The matching of points is based on the identities of the key file
key.txt.
In total  119 points of file Rotstad.k was not matched with a point
in file Sweref99_latlongh=0.k
Number of common points:   12
--------------------------------------------------------------------
Minimum and maximum coordinate values in degrees and minutes:
Latitude                  55  54            56  14
Longitude                 12  34            12  57
--------------------------------------------------------------------
/
PROJECTION PARAMETERS
PROJECTION Transverse Mercator
REFERENCE FRAME SWEREF 99 lat long/
GRID SYSTEM Fictive x y /
ELLIPSOID GRS 1980
    6378137.000   298.2572221010 /
CENTRAL MERIDIAN
    13  31  42.4560000000 /
SCALE
     .999972040000 /
FALSE NORTHING
  -6203871.2490 /
FALSE EASTING
     61645.0200 /
LATITUDE OF ORIGIN
          .0000 /
END OF PROJECTION PARAMETERS

/*------------------------------------------------------------------

HELMERT PARAMETERS /
FSYSTEM Fictive x y /
TSYSTEM Rotstad lokala/
AREA          -5250.          1700.         29582.         25040.
/
FORMEL PLAN
6-PAR HELMERT
     -646.511370993850300   9.989597174353925E-001
4.560132414182313E-002
      604.239294856388700  -4.560132414182313E-002
9.989597174353925E-001
/
END OF HELMERT PARAMETERS

HELMERT INVERSE PARAMETERS /
FSYSTEM Rotstad lokala/
```

```
AREA          -5250.          1700.         29582.         25040.
/
TSYSTEM Fictive x y /
FORMEL PLAN
6-PAR HELMERT
      673.392929897349200   9.989597196110401E-001  -
4.560132424113886E-002
     -574.128941913437000   4.560132424113886E-002
9.989597196110401E-001
/
END OF INVERSE HELMERT PARAMETERS

/*------------------------------------------------------------------

RESIDUALS
/* Sign of residuals: transformed minus original grid coordinates
                           North        East      Radial
  732311   1               -.107         .008        .107
  732631   29               .001         .014        .014
  732121   57               .058        -.054        .079
  732041   58               .014        -.049        .051
 7327190   60               .001        -.031        .031
732531.2   598              .039         .084        .093
 7323190   10111           -.095         .009        .095
 7324090   10113           -.074        -.046        .087
 7315990   10116            .057        -.009        .058
732122.2   732122.2         .046         .002        .046
  732241   732241           .057         .030        .065
  732611   732611           .002         .043        .043

R.m.s.                      .057         .040        .070
Max deviation              -.107         .084        .107 at   732311
1

Number of common points       12

/*------------------------------------------------------------------

DESCRIPTION OF THE 2-DIMENSIONAL HELMERT TRANSFORMATION

The parameters should be used with the algebraic formula:

xt = dx + Scale * ( xf * cos(Rot.) - yf * sin(Rot.) )
yt = dy + Scale * ( xf * sin(Rot.) + yf * cos(Rot.) )

Let a = Scale * cos(Rot.) and b = Scale * sin(Rot.) then

xt = dx + a * xf - b * yf
yt = dy + b * xf + a * yf

/*------------------------------------------------------------------

Parameters for the direction Fictive x y   ->  Rotstad lokala

Rot.  =    -2.904077551862 gon (  -2.613669796676 degr.)
Scale =  .9999999989110433
dx    =         -646.51137 m.  (translation along South-North axis)
dy    =          604.23929 m.  (translation along West - East axis)
a     =  .9989597174353924
b     = -.0456013241418231

/*------------------------------------------------------------------
```

```
Parameters for the direction Rotstad lokala  ->  Fictive x y

Rot.  =     2.904077551862 gon (   2.613669796676 degr.)
Scale = 1.0000000010889570
dx    =          673.39293 m.  (translation along South-North axis)
dy    =         -574.12894 m.  (translation along West - East axis)
a     =  .9989597196110401
b     =  .0456013242411389

/*------------------------------------------------------------------
```

Exempel på transformationsfil (tf-fil) färdig för användning i GTRANS

```
/* PROJFIT compiled May 04, 2004

TRANSFORMATION details

The parameters are based on a least squares fit using a combined
Transverse Mercator projection and 2D similarity transformation.

Ellipsoid: GRS 1980

TRANSVERSE MERCATOR PARAMETERS
Central meridian                13  31  42.456000 degr. min. sec.
Scale along central merdian         .999972040000
False northing                      -6203871.2490 m
False easting                          61645.0200 m

/
FSYSTEM SWEREF 99 lat long/
LATLONG DEG/
TSYSTEM Rotstad lokala/
AREA          -5250.          1700.         29582.         25040./
ELLIPSOID GRS 1980/
PROJ Gauss
G     13  31 42.4560000000 DEG
  -6203871.2490
     61645.0200
     .999972040000 /
SYSTEM Fictive x y /
FORMEL PLAN
6-PAR HELMERT
     -646.511370993850300   9.989597174353925E-001
4.560132414182313E-002
      604.239294856388700  -4.560132414182313E-002
9.989597174353925E-001
/
GRUNDMEDELFEL            .055     19 /
STOP /
Number of common points          12

/*-----------------------------------------------------------------

DESCRIPTION OF THE 2-DIMENSIONAL HELMERT TRANSFORMATION

The parameters should be used with the algebraic formula:

xt = dx + Scale * ( xf * cos(Rot.) - yf * sin(Rot.) )
yt = dy + Scale * ( xf * sin(Rot.) + yf * cos(Rot.) )

Let a = Scale * cos(Rot.) and b = Scale * sin(Rot.) then

xt = dx + a * xf - b * yf
yt = dy + b * xf + a * yf

/*-----------------------------------------------------------------

Parameters for the direction Fictive x y   ->  Rotstad lokala

Rot.  =    -2.904077551862 gon (  -2.613669796676 degr.)
Scale =  .9999999989110433
dx    =         -646.51137 m.  (translation along South-North axis)
```

```
dy    =          604.23929 m.  (translation along West - East axis)
a     =  .9989597174353924
b     = -.0456013241418231

/*------------------------------------------------------------------

The coordinates used in the fitting process are taken from the
files:
Geodetic   coordinates: Sweref99_latlong_h=0.k
Plane grid coordinates: Rotstad.k

Geodetic system name: SWEREF 99 lat long
Grid     system name: Rotstad lokala_lokalt

Further details of the computation are given in the file
Rix_chk_S2_1.
/*------------------------------------------------------------------
Worked example, (4 corners surrounding the valid area)
                      Latitude             Longitude
Northing(m)    Easting(m)
South-west   55°  54'   .00000"    12°  34'   .00000"        -
6769.862      2369.249
South-east   55°  54'   .00000"    12°  57'   .00000"        -
5943.070     26333.935
North-west   56°  14'   .00000"    12°  34'   .00000"
30326.446      1193.302
North-east   56°  14'   .00000"    12°  57'   .00000"
31145.096     24952.114
/*------------------------------------------------------------------
End of information.
```

Rapporter i geodesi och geografiska informationssystem från Lantmäteriet

2006:4 Klang Dan: KRIS-GIS® projekt i Eskilstuna. Kvalitet i höjdmodeller.

2006:5 von Malmborg Helena: Jämförelse av Epos och nätverks-DGPS.

2006:8 Wennström Hans-Fredrik (ed.): Struve Geodetic Arc 2006 International Conference – the Struve arc and extensions in space and time.

2006:9 Shah Assad: Systematiska effekter inom den tredje riksavvägningen.

2007:1 Johnsson Fredrik & Wallerström Mattias: En nätverks-RTKjämförelse mellan GPS och GPS/GLONASS.

2007:4 Ågren Jonas & Svensson Runar: Postglacial land uplift model and system definition for the new Swedish height system RH 2000.

2007:8 Halvardsson Daniel & Johansson Joakim: Jämförelse av distributionskanaler för projektanpassad nätverks-RTK.

2007:10 Lidberg Martin & Lilje Mikael: Evaluation of monument stability in the SWEPOS GNSS network using terrestrial geodetic methods - up to 2003.

2007:11 Lilje Christina, Engfeldt Andreas, Jivall Lotti: Introduktion till GNSS.

2007:12 Ivarsson Jesper: Test and evaluation of SWEPOS Automated Processing Service.

2007:14 Lilje Mikael, Eriksson Per-Ola, Olsson Per-Anders, Svensson Runar, Ågren Jonas: RH 2000 och riksavvägningen.

2008:4 Johansson S Daniel & Persson Sören: Kommunikationsalternativ för nätverks-RTK – virtuell referensstation kontra nätverksmeddelande.

2009:1 Ågren Jonas: Beskrivning av de nationella geoidmodellerna SWEN08_RH2000 och SWEN08_RH70.

2009:2 Odolinski Robert & Sunna Johan: Detaljmätning med nätverks-RTK – en noggrannhetsundersökning.

2009:4 Fridén A & Persson A-K: Realtidsuppdaterad etablering av fri station – ett fälttest med radioutsänd projektanpassad nätverks-RTK.

2009:5 Bosrup, Susanna & Illerstam, Jenny. Restfelshantering med Natural Neighbour och TRIAD vid byte av koordinatsystem i plan och höjd.

L A N T M Ä T E R I E T

Vaktmästeriet 801 82 GÄVLE Tfn 026 - 65 29 15 Fax 026 - 68 75 94
Internet: www.lantmateriet.se